

Diskrete Verteilungen:

$\text{Bin}(n, p)$: Anzahl Erfolge aus n Versuchen $\text{Be}(p) = \text{Bin}(1, p)$ $\text{Po}(\lambda)$: Anzahl Ereignisse pro Zeiteinheit $\text{Ge}(p)$: Anzahl Versuche bis 1. Erfolg
mehr Infos / Einführung zu Verteilungen (erkennen) → siehe Playlist-Video!

$$\text{Be}(p): \quad E(X) = p, \quad V(X) = p(1-p) \quad P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k} \quad k \in \{0, 1\}$$

$$\text{Bin}(n, p): \quad E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p) \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n$$

$$\text{Po}(\lambda): \quad E(X) = \lambda, \quad V(X) = \lambda \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k \geq 0$$

$$\text{Ge}(p): \quad E(X) = \frac{1}{p}, \quad V(X) = \frac{(1-p)}{p^2} \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \geq 1$$

$$P(X \geq k) = P(X > k-1) = (1-p)^{k-1}$$

Sonderfall nur für $\text{Ge}(p)$!

Hypergeometrische Verteilung (mit N Objekten, wovon M "gut" sind und n Objekte gezogen werden):

mit $p = \frac{M}{N}$ ist:

$$E(X) = n \cdot p, \quad V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

$$\max(0, n - (N - M)) \leq k \leq \min(M, n)$$

Stetige Verteilungen:

$\text{Exp}(\lambda)$: Dauer bis zu einem Ereignis

$U[a, b]$: (Warte-)Zeit aus gegebenem Zeitintervall $[a, b]$

$$U[a, b]: \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\text{Exp}(\lambda): \quad E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2): \quad E(X) = \mu, \quad V(X) = \sigma^2$$

$$\mathcal{N}(0, 1): \quad E(X) = 0, \quad V(X) = 1$$

$$t_n: \quad E(X) = 0, \quad V(X) = \frac{n}{n-2}$$

$$F_{m,n}: \quad E(X) = \frac{n}{n-2}, \quad V(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$$

$$\chi_n^2: \quad E(X) = n, \quad V(X) = 2n$$

$$P(X \leq x) = F(x)$$

$$P(X > x) = 1 - F(x) \quad P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 1, & x > b \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Z -Transformation → $\mathcal{N}(0, 1)$ -Tabelle

$\Phi(x) = F(x)$ → $\mathcal{N}(0, 1)$ -Tabelle

$F(x)$ → t_n -Tabelle

$F(x)$ → $F_{m,n}$ -Tabelle

$F(x)$ → χ_n^2 -Tabelle

Ausführlichere Infos zu den Verteilungen:

Skript Kapitel 6: Verteilungen (Lesen/überfliegen!!!)

z.B. verschiedene Zusammenhänge (zwischen Verteilungen) wie die Definitionen der Chi-quadrat Verteilung:

$$(X_i) \text{ iid } \mathcal{N}(0, 1) \rightarrow Y := \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2 \quad \text{mit } E(Y) = n, \quad V(Y) = 2n.$$

$$(X_i) \text{ iid } \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \rightarrow Y := \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2 \quad \text{mit } E(Y) = n, \quad V(Y) = 2n.$$

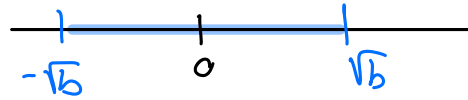
$$\text{Falls } \bar{x} \text{ anstelle } \mu \rightarrow Z := \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad \text{mit } E(Z) = n-1 \quad V(Z) = 2(n-1)$$

$$\text{Nützliche allg. Z'vble: } X = \text{"Augenzahl"} \quad E(X) = 3.5, \quad V(X) = \frac{35}{12} \quad P(X = k) = \frac{1}{6}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Von X^2 oder $|X|$ zu X :

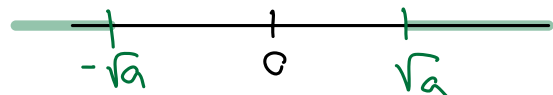
• $X^2 < b \Rightarrow -\sqrt{b} < X < +\sqrt{b}$

$X^2 < b$ oder $|X| < \sqrt{b}$



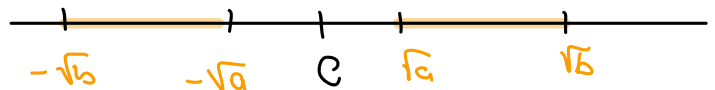
• $X^2 > a \Rightarrow X < -\sqrt{a}$ und $X > +\sqrt{a}$

$X^2 > a$ oder $|X| > \sqrt{a}$



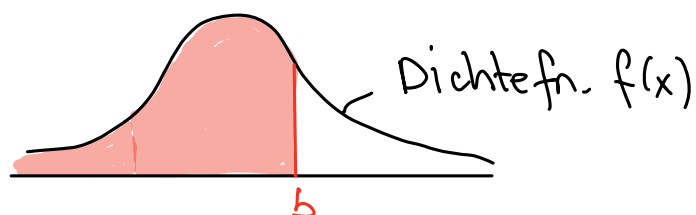
$a < X^2 < b$
-r / +r
 $-\sqrt{b} < X < -\sqrt{a}$ oder $\sqrt{a} < X < \sqrt{b}$

$a < X^2 < b$



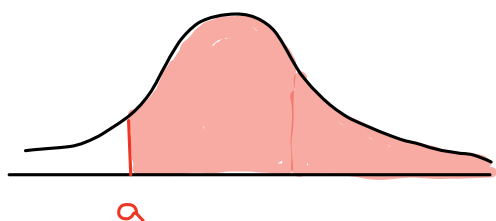
- bei stetigen Z'Vblen: Von $P(\dots)$ zu $F(\dots)$

Fall 1: $P(X \leq b) = F(b)$

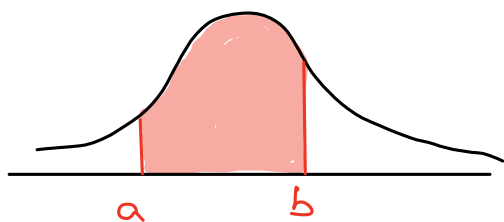


Per Definition immer
 $F(\dots) = P(X \leq \dots)$

Fall 2: $P(a < X) \stackrel{\text{Gegenw.}}{=} 1 - P(X \leq a) \stackrel{\text{Def}}{=} 1 - F(a)$



Fall 3: $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$



- bei diskrete Z'Vblen: via $P(X=k)$

Nur einzelne Werte möglich, d.h. egal ob $X \geq a$, $X \leq b$, $a \leq X \leq b$

immer überlegen welche Werte alle möglich sind $\rightarrow$

W'keiten für alle möglichen Zahlen einzeln ausrechnen!
 mit $P(X=k)$

Gegenw'keit ev. hilfreich, um weniger Arbeit zu haben $\leftarrow$

Median berechnen

Fall 1: allgemeine diskrete Zufallsgrösse

diskrete Verteilung als Tabelle angeben:

ab welchem x_i gilt erstmals: $F(x_i) = \sum p_i > 0.5$

Bsp.:

x_i	-1	1	2	5
p_i	0.1	0.1	0.5	0.3

$$P(X=-1) = 0.1 < 0.5 \Rightarrow P(X=-1) + P(X=1) = 0.2 < 0.5$$

$$\Rightarrow P(X=-1) + P(X=1) + P(X=2) = 0.7 > 0.5 \quad \checkmark$$

Median von X ist 2

Sonderfall diskret: Falls $F(x_i) = \sum p_i = 0.5$!

Memo
dazu



Median = Durchschnitt von diesem und nächstgrösserem x_i

Bsp.:

x_i	-1	1	2	5
p_i	0.1	0.1	0.3	0.5

$$F(2) = 0.5 \rightarrow \text{Median} = \frac{2+5}{2} = \underline{\underline{3.5}}$$

Fall 2: bekannte diskrete Zufallsgrösse

$X \sim$ bekannte Verteilung $\rightarrow$ Tabelle $\frac{x_i}{p_i}$ und wie allg. diskre.

Bsp.: $X \sim P_0(0.7) \rightarrow$

x_i	0	1	2 ...
p_i	0.4966	0.3476	nicht mehr nötig
$\sum p_i$	0.4966	0.8442	

$< 0.5 \quad > 0.5 \checkmark \rightarrow m=1$

Fall 3: allgemeine stetige Zufallsgrösse

$$P(X \leq m) = \int_{-\infty}^m f(x) dx \stackrel{!}{=} 0.5 = F(m)$$

Bsp.: $\int_{-\infty}^3 f(x) dx = \int_1^m -2x + 4 dx = \dots$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases} \quad -x^2 + 4x - 3 = 0.5$$

TR $\Rightarrow$

$$x_1 = 1.29 \in [1, 2] \checkmark$$

$$x_2 = 2.7 \notin [1, 2]$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\text{Median} = 1.29}}$$

Fall 4: bekannte stetige Zufallsgrösse X

$$X \sim U[0, b] \rightarrow m = \frac{a+b}{2}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow m = \mu$$

$$X \sim \exp(\lambda) \rightarrow m = \frac{\ln(2)}{\lambda} = T_{1/2}$$

$$X \sim N(0, 1) \rightarrow m = 0$$

$$X \sim t_n \rightarrow m = 0$$

Fall 5: für $Y = f(X)$ mit X bekannte Verteilung

- Falls $f(X)$ eine streng monotone Funktion:

für die möglichen
X-Werte
(Bsp. $\exp(X) \Rightarrow X \geq 0$)

$$\text{Median von } Y \rightarrow m_y = f(m_x) \text{ mit } m_x = \text{Median von } X$$

Bsp.: $X \sim \exp(2)$. Median von $X^3 + 1$?

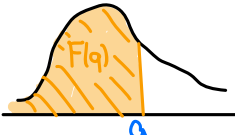
$$\Downarrow \\ m_x = \frac{\ln(2)}{2}$$

$$\rightarrow \text{Median von } Y = (X)^3 + 1: m_y = (m_x)^3 + 1 = \left(\frac{\ln(2)}{2}\right)^3 + 1 \stackrel{\text{TR}}{\approx} \underline{\underline{1.0416}}$$

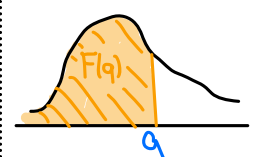
- Falls $f(X)$ nicht streng monoton ist: (aber X bekannte Vert.)

von Hand $P(Y \leq m) = P(\dots \leq m) \stackrel{!}{=} 0.5$ via X (auflösen)

und dessen Verteilung nutzen ...

	n Realisationen einer Z'vblen X_i	 einzelne W'keiten oder $f(x)$ $P(X=x)$	 $F(q) = P(X \leq q)$	P -Quantil $\hat{=}$ CV $q_p = F^{-1}(p)$
$\text{Bin}(n, p)$ _binom	$r\text{binom}(n, \text{size}, \text{prob})$	$d\text{binom}(x, \text{size}, \text{prob})$	$p\text{binom}(q, \text{size}, \text{prob})$	$q\text{binom}(p, \text{size}, \text{prob})$
$\text{Be}(p)$ _binom	$r\text{binom}(n, 1, \text{prob})$	$d\text{binom}(x, 1, \text{prob})$	$p\text{binom}(q, 1, \text{prob})$	$q\text{binom}(p, 1, \text{prob})$
$\text{Po}(\lambda)$ _pois	$r\text{pois}(n, \text{lambda})$	$d\text{pois}(x, \text{lambda})$	$p\text{pois}(q, \text{lambda})$	$q\text{pois}(p, \text{lambda})$
$\text{Ge}(p)$ _geom	$r\text{geom}(n, \text{prob})$	$d\text{geom}(x, \text{prob})$	$p\text{geom}(q, \text{prob})$	$q\text{geom}(p, \text{prob})$
Hypergeom. _hyper	in R eigentlich m, n, k $r\text{hyper}(m, M, N-M, n)$	in R eigentlich m, n, k $d\text{hyper}(x, M, N-M, n)$	in R eigentlich m, n, k $p\text{hyper}(q, M, N-M, n)$	in R eigentlich m, n, k $q\text{hyper}(p, M, N-M, n)$
$\text{U}[a, b]$ _unif	$r\text{unif}(n, \text{min}, \text{max})$	$d\text{unif}(x, \text{min}, \text{max})$	$p\text{unif}(q, \text{min}, \text{max})$	$q\text{unif}(p, \text{min}, \text{max})$
$\text{Exp}(\lambda)$ _exp	$r\text{exp}(n, \text{lambda})$	$d\text{exp}(x, \text{lambda})$	$p\text{exp}(q, \text{lambda})$	$q\text{exp}(p, \text{lambda})$
$N(\mu, \sigma)$ _norm	$r\text{norm}(n, \text{mean}, \text{sd})$	$d\text{norm}(x, \text{mean}, \text{sd})$	$p\text{norm}(q, \text{mean}, \text{sd})$	$q\text{norm}(p, \text{mean}, \text{sd})$
t_n _t	$r\text{t}(n, \text{df})$	$d\text{t}(x, \text{df})$	$p\text{t}(q, \text{df})$	$qt(p, \text{df})$
$F_{m, n}$ _f	$r\text{f}(n, \text{df1}, \text{df2})$	$d\text{f}(x, \text{df1}, \text{df2})$	$p\text{f}(q, \text{df1}, \text{df2})$	$q\text{f}(p, \text{df1}, \text{df2})$
χ^2_n _chisq	$r\text{chisq}(n, \text{df})$	$d\text{chisq}(x, \text{df})$	$p\text{chisq}(q, \text{df})$	$q\text{chisq}(p, \text{df})$

Vor dem Zufall! $P(X=x)$ Realisation der Z.V.ble
"Zahl nach dem Zufall"



Aufpassen!

n Realisationen einer Z.V.ble X ;

einzelne W'keiten oder $f(x)$
 $P(X=x)$

$F(q) = P(X \leq q)$

$P\text{-Quantil} \hat{=} CV$
 $q_p = F^{-1}(p)$

$Bin(n,p)$
_binom

$r\text{binom}(n, size, prob)$

$d\text{binom}(x, size, prob)$

$p\text{binom}(q, size, prob)$

$q\text{binom}(p, size, prob)$

$Be(p)$
_binom

$r\text{binom}(n, 1, prob)$

$d\text{binom}(x, 1, prob)$

$p\text{binom}(q, 1, prob)$

$q\text{binom}(p, 1, prob)$

$Po(\lambda)$
_pois

$r\text{pois}(n, lambda)$

$d\text{pois}(x, lambda)$

$p\text{pois}(q, lambda)$

$q\text{pois}(p, lambda)$

$Ge(p)$
_geom

$r\text{geom}(n, prob)$

$d\text{geom}(x, prob)$ $\nearrow = k-1$

$p\text{geom}(q, prob)$ $\nearrow = k-1$

$q\text{geom}(p, prob)$ $\nwarrow = k-1$

Hypergeom.
_hyper

in R eigentlich m, n, k
 $r\text{hyper}(m, M, N-M, n)$

in R eigentlich m, n, k
 $d\text{hyper}(x, M, N-M, n)$

in R eigentlich m, n, k
 $p\text{hyper}(q, M, N-M, n)$

in R eigentlich m, n, k
 $q\text{hyper}(p, M, N-M, n)$

$U[0,1]$
_unif

$r\text{unif}(n, min, max)$

$d\text{unif}(x, min, max)$

$p\text{unif}(q, min, max)$

$q\text{unif}(p, min, max)$

$Exp(\lambda)$
_exp

$r\text{exp}(n, lambda)$

$d\text{exp}(x, lambda)$

$p\text{exp}(q, lambda)$

$q\text{exp}(p, lambda)$

$N(\mu, \sigma)$
_norm

$r\text{norm}(n, mean, sd)$

$d\text{norm}(x, mean, sd)$

$p\text{norm}(q, mean, sd)$

$q\text{norm}(p, mean, sd)$

t_n
_t

$r\text{t}(n, df)$

$d\text{t}(x, df)$

$p\text{t}(q, df)$

$qt(p, df)$

$F_{m,n}$
_f

$r\text{f}(n, df1, df2)$

$d\text{f}(x, df1, df2)$

$p\text{f}(q, df1, df2)$

$q\text{f}(p, df1, df2)$

χ^2_n
_chisq

$r\text{chisq}(n, df)$

$d\text{chisq}(x, df)$

$p\text{chisq}(q, df)$

$q\text{chisq}(p, df)$

Hypothesentests (kurz)

① Hypothesen aufstellen

$$H_0: \mu = \mu_0 \\ p = p_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0 \\ p \neq p_0$$

② Teststatistik-Wert berechnen

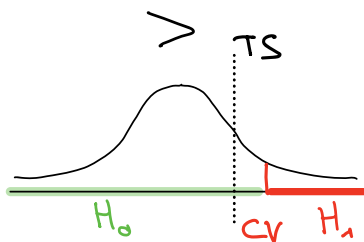
$$\frac{\text{Schätzer} - \underline{H_0\text{-Wert}}}{\text{Standardfehler}}$$

③ Kritischer Wert in Tabelle ablesen (CV)

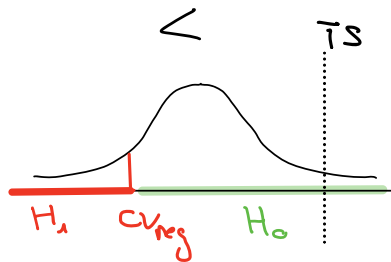
Tabellen auf den letzten Seiten

④ Testentscheid (vergleiche Teststatistikwert mit dem CV)

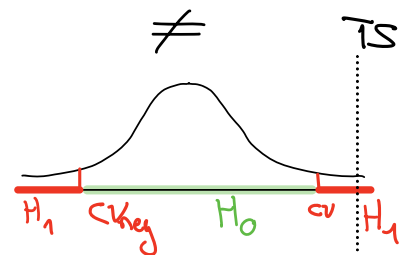
1-seitig nach rechts



1-seitig nach links



2-seitig



Luchsingers Kochbuchrezept:

- ① Hypothesen aufstellen
- ② α und (wenn möglich) n wählen
- ③ gute Teststatistik = Formel wählen
- ④ Verteilung der Teststatistik unter H_0
- ⑤ Kritischer Wert bestimmen
- ⑥ Daten brauchen = TS-Wert berechnen / Zahlen einsetzen
- ⑦ H_0 annehmen oder ablehnen

3. + 4. + 6. darf man auch in einem Schritt erledigen

Daten $\sim N(\mu, \sigma^2)$

t-Test (für μ "Mittelwert" "Durchschnitt")

KI für μ ("Mittelwert" "Durchschnitt")

1
Stich-
probe

① $H_0: \mu \stackrel{\leq}{=} \mu_0$ $H_1: \mu \stackrel{>}{<}{\neq} \mu_0$

1-seitig
2-seitig

② $\frac{\bar{X} - \mu_0}{\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)} \stackrel{H_0}{\sim} t_{df} \stackrel{||}{=} t_{n-1}$

③ $> : CV = t_{n-1, \alpha} \text{ (unten)}$
 $< : CV = -t_{n-1, \alpha} \text{ (unten)}$
 $\neq : CV = t_{n-1, \alpha} \text{ (oben)}$

$$\left[\bar{x} - CV \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + CV \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

$CV = t_{n-1, \alpha} \text{ (oben)}$
 Freiheitsgrade

$$s \stackrel{||}{=} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot SS_{xx}}$$

Falls σ gegeben $\rightarrow N(0,1)$ -Verteilung / Werte

2
Stich-
proben

① $H_0: \mu_x - \mu_y \stackrel{\leq}{=} 0$ $H_1: \mu_x - \mu_y \stackrel{>}{<}{\neq} 0$

② $\frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \mu_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cdot \left(\frac{SS_{xx} + SS_{yy}}{n_1 + n_2 - 2}\right)}} \stackrel{H_0}{\sim} t_{df} \stackrel{||}{=} t_{n_1 + n_2 - 2}$

③ $> : CV = t_{n_1 + n_2 - 2, \alpha} \text{ (unten)}$
 $< : CV = -t_{n_1 + n_2 - 2, \alpha} \text{ (unten)}$
 $\neq : CV = t_{n_1 + n_2 - 2, \alpha} \text{ (oben)}$

$$\left[(\bar{x} - \bar{y}) \pm CV \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \cdot \frac{SS_{xx} + SS_{yy}}{n_1 + n_2 - 2}} \right]$$

$CV = t_{n_1 + n_2 - 2, \alpha} \text{ (oben)}$

$$\frac{SS_{xx} + SS_{yy}}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_x^2 + (n_2 - 1) \cdot s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

In R-Code: $s^2 = \text{var}()$ $\bar{x} = \text{mean}()$
 $SS_{xx} = (n_1 - 1) \cdot \text{var}(x)$ $SS_{yy} = (n_2 - 1) \cdot \text{var}(y)$

④ H_0 verwerfen und H_1 annehmen falls:

einseitig positiv ($>$)

einseitig negativ ($<$)

zweiseitig ($\neq$)

$TS\text{-Wert} \geq CV$

$TS\text{-Wert} \leq CV_{neg}$

oder $TS\text{-Wert} \leq CV_{neg}$
 $TS\text{-Wert} \geq CV$
 $|TS\text{-Wert}| \geq CV$

	Daten ~ Bin(n, p) aber $n > 30$ → CLT Test auf Proportionen (für p "Anteils-Test")	KI für p ("Anteil, Erfolgsw'keit")
1 Stich- probe	① $H_0: p \overset{\leq}{=} p_0$ $H_1: p \overset{1\text{-seitig}}{>} p_0$ $\overset{2\text{-seitig}}{\neq} p_0$ ② $\frac{\frac{k}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$ $\hat{p} = \frac{k}{n}$ ③ $>: CV = t_{\infty, \alpha} \text{ (unten)}$ $<: CV = -t_{\infty, \alpha} \text{ (unten)}$ $\neq: CV = t_{\infty, \alpha} \text{ (oben)}$	$\left[\hat{p} - CV \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + CV \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$ $\hat{p} = \frac{k}{n}$ $CV = t_{\infty, \alpha}$ (oben) eigentlich $N(0,1)$-Tabelle für CV bei Anteils-Tests / KI Aber via t_{∞} einfacher $t_{\infty} \hat{=} N(0,1)$-Tabelle / Werte
2 Stich- proben	① $H_0: p_2 - p_1 \overset{\leq}{=} 0$ $H_1: p_2 - p_1 \overset{>}{\neq} 0$ ② $\frac{(\hat{p}_2 - \hat{p}_1) - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$ $\hat{p}_1 = \frac{k_1}{n_1}$ $\hat{p}_2 = \frac{k_2}{n_2}$ ③ $>: CV = t_{\infty, \alpha} \text{ (unten)}$ $<: CV = -t_{\infty, \alpha} \text{ (unten)}$ $\neq: CV = t_{\infty, \alpha} \text{ (oben)}$	$\left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm CV \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \right]$ $\hat{p}_1 = \frac{k_1}{n_1}$ $\hat{p}_2 = \frac{k_2}{n_2}$ $CV = t_{\infty, \alpha}$ (oben) Bem. Die letzte Zeile in der t-Tabelle bei $df = \infty$ sind $N(0,1)$-Werte

④ H_0 verwerfen

und H_1 annehmen falls:

einseitig positiv ($>$)

einseitig negativ ($<$)

zweiseitig ($\neq$)

TS-Wert $\geq CV$

TS-Wert $\leq CV_{neg}$

oder
TS-Wert $\leq CV_{neg}$
TS-Wert $\geq CV$
|TS-Wert| $\geq CV$

Stichprobengröße bestimmen für KI-Länge ℓ

- KI für μ : (t-Test)

$$n \geq \left(\frac{2 \cdot CV \cdot s}{\ell} \right)^2$$

mein Input:



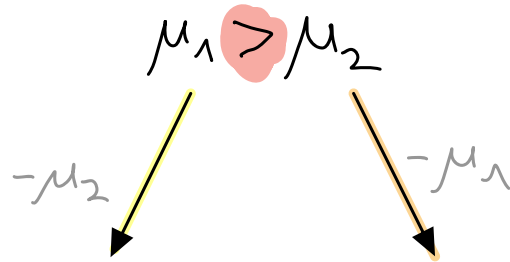
- KI für p :
(Proportionen / Anteilstest)

$$n \geq \left(\frac{CV}{\ell} \right)^2$$

$$CV = t_{\infty, \frac{\alpha}{2} \text{ (oben)}} \\ \parallel \\ z_{1-\alpha/2} \text{ aus } N(0,1)$$

2-Stichproben Test: egal welche Differenz

.... Sie vermuten, der Mittelwert der 1. Gruppe ist größer als der Mittelwert der 2. Gruppe ...



• $\mu_1 - \mu_2 > 0$
(rechtsseitiger Test)

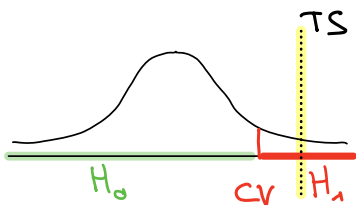
$0 > \mu_2 - \mu_1 \iff \mu_2 - \mu_1 < 0$
(linksseitiger Test)

• TS: $\frac{\mu_1 - \mu_2 - 0}{\text{Std. error}}$

TS: $\frac{\mu_2 - \mu_1 - 0}{\text{Std. error}}$

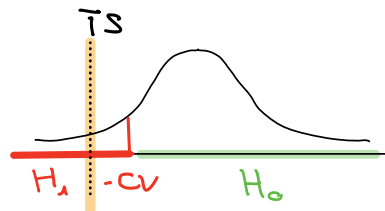
• Testentscheid:

$TS \geq CV \rightarrow H_0 \text{ verwerfen, } H_1 \text{ annehmen}$



Testentscheid:

$TS \leq -CV \rightarrow H_0 \text{ verwerfen, } H_1 \text{ annehmen}$



Bsp. Konfidenzintervall (für Differenz) :

$[-1, 2]$

vs

$[-2, 1]$

P-Wert (PW)

Testentscheid:

Variante 1: Testst.-Wert vs. CV



Variante 2: p-Wert vs. α

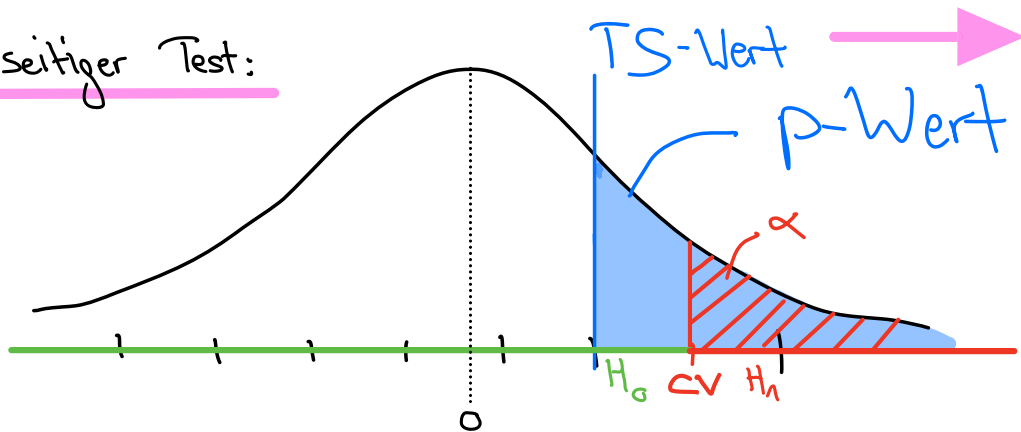
gilt immer

$p\text{-Wert} \leq \alpha \Rightarrow H_1$

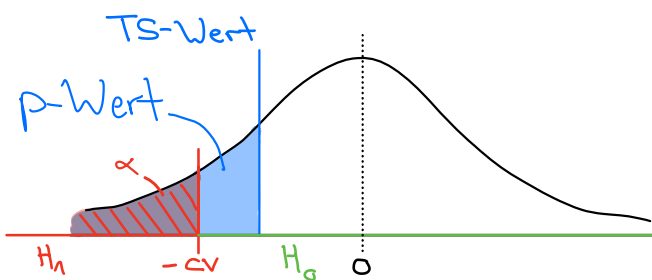
$p\text{-Wert} > \alpha \Rightarrow H_0$

$p\text{-Wert} = P(X \text{ "gleich oder noch extremer" als dieser Teststatistik-Wert})$
in Richtung H_1 !

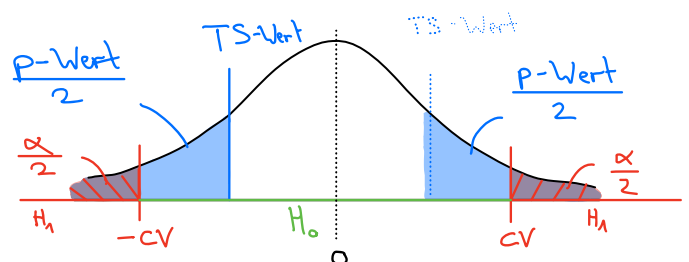
Bsp. rechtsseitiger Test:



← linksseitig



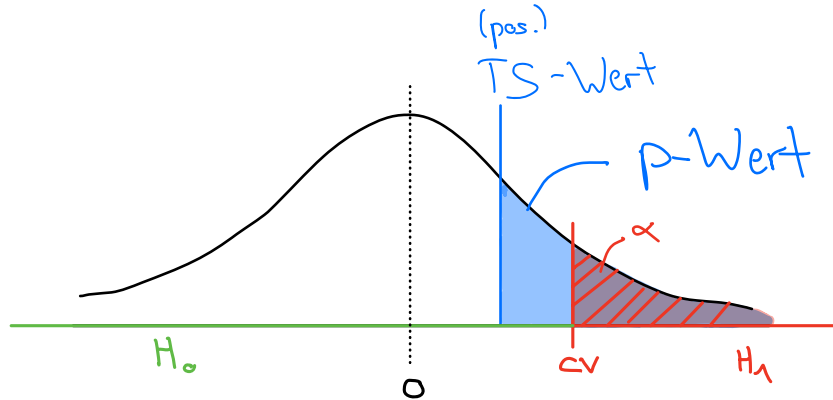
↔ zweiseitig



3 p-Wert Fälle

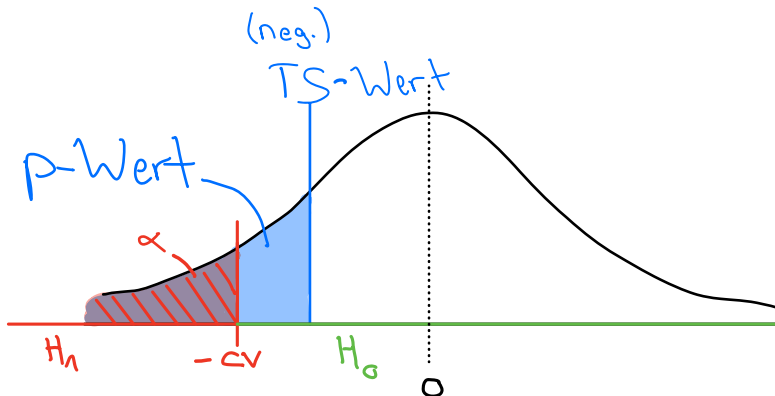
Fall 1: $H_1: >$

$$p\text{-Wert} = P(X \geq \text{TS-Wert})$$



Fall 2: $H_1: <$

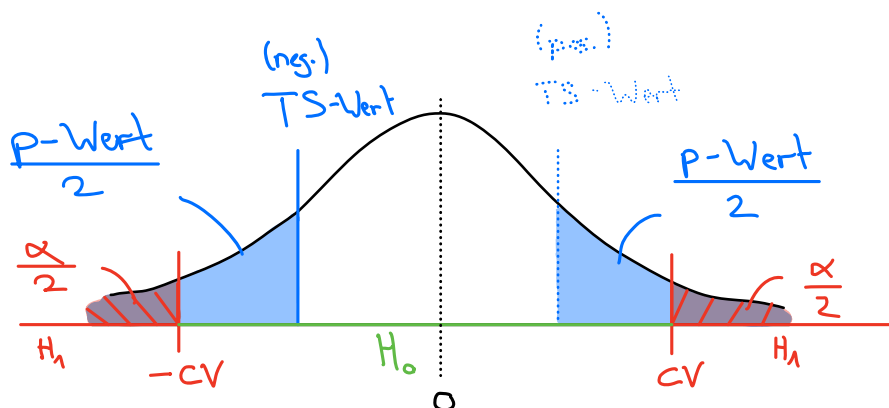
$$p\text{-Wert} = P(X \leq \text{TS-Wert})$$



Fall 3: $H_1: \neq$

$$p\text{-Wert} = P(X \leq \text{neg. TS}) + P(X \geq \text{pos. TS})$$

$$= 2 \cdot P(X \leq \text{neg. TS}) = 2 \cdot P(X \geq \text{pos. TS})$$



Anova / Varianzanalyse:

falls wir 2 oder mehr Stichproben / Gruppen haben, deren Mittelwerte wir vergleichen wollen

① Hypothesen (für einen Anova-Hypothesentest)

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (\text{alle Mittelwerte sind gleich})$$

$$H_1: \exists i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\} \text{ mit } \mu_i \neq \mu_j$$

(Mindestens zwei Mittelwerte/Erwartungswerte sind verschieden)

k = Anz. Stichproben / Gruppen

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

② Teststatistik

$$V = \frac{MSG}{MSE} = \frac{\left(\frac{SS_G}{k-1} \right)}{\left(\frac{SS_E}{n-k} \right)} \sim F_{k-1, n-k}$$

Zähler-df $\leftarrow$ $\rightarrow$ Nenner-df

③ kritischer Wert: $\alpha = 0.05$ $CV = F_{k-1, n-k}$

Zähler-df $\leftarrow$ $\rightarrow$ Nenner-df

④ Testentscheid

$V \geq CV \Rightarrow H_0$ verwerfen und H_1 annehmen

Benötigte Infos (indirekt geben):

$$MS_G = \frac{1}{k-1} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2}_{SS_G} = \frac{SS_G}{k-1}$$

$$MS_E = \frac{1}{n-k} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_{\cdot j})^2}_{SS_E} = \frac{SS_E}{n-k}$$

Fundi Anova:

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_{\cdot j})^2$$

"Von Hand":

$$SS_G = n_1 \cdot (\bar{x}_1 - GM)^2 + \dots + n_j \cdot (\bar{x}_j - GM)^2 + \dots + n_k \cdot (\bar{x}_k - GM)^2$$

$$SS_E = \text{Summe aller Stichproben } SS_{xx} = SS_{xx_1} + \dots + SS_{xx_k}$$

$$= (n_1 - 1) \cdot s_1^2 + \dots + (n_j - 1) \cdot s_j^2 + \dots + (n_k - 1) \cdot s_k^2$$

R-Ausdruck:

R Ausdruck für eine ANOVA / Varianzanalyse:

Call:

```
aov(formula = silver ~ group, data = sites)
```

Terms:

	SS_G	group	Residuals	SS_E
Sum of Squares	0.0008889		1.6080000	
Deg. of Freedom	$k-1$	1	7	$n-k$

Residual standard error: 0.4792852

Estimated effects may be unbalanced

>

```
> summary(analyse)
```

	SS_G	$MS_G = \frac{SS_G}{k-1}$	$\rightarrow SS_G = MS_G \cdot (k-1)$
group	$k-1$	1	0.0009
		0.00089	0.004
			0.952
Residuals	$n-k$	7	1.6080
			0.22971
	SS_E	$MS_E = \frac{SS_E}{n-k}$	$v = \frac{MS_G}{MS_E}$

P-Wert

Lineare Regression

Modell: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_i + \epsilon_i$ $\epsilon_i \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$

Regressionsgerade

• Regressionsgerade schätzen: $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot x_i$

Schätzer Steigung: (mit der OLS-Methode)

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

$$SS_{xx} = (n-1) \cdot \text{var}(x) = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$SS_{yy} = (n-1) \cdot \text{var}(y) = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$SS_{xy} = (n-1) \cdot \text{cov}(x, y) = \sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$

Schätzer y-Achsenabschnitt:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \cdot \bar{x}$$

• Korrelationskoeffizient r_{xy} :

$$r_{xy} = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx} \cdot SS_{yy}}} = \hat{\beta}_1 \cdot \sqrt{\frac{SS_{xx}}{SS_{yy}}} \quad -1 \leq r_{xy} \leq +1$$

$r_{xy} \hat{=}$ wie stark ist der lineare Zus'hang zw. X und Y?

(d.h. wie nahe sind die Punkte an der Regressionsgeraden)

perfekter Zus'hang heisst alle Punkte liegen auf der Regr. geraden

(pos./neg.)



$$r_{xy} = +1$$

oder

$$r_{xy} = -1$$

↑
falls pos. Steigung $\hat{\beta}_1$

↑
neg. Steigung $\hat{\beta}_1$

• Hypothesen testen (t-Test)

① Hypothesen (oft 0 für "kein Zusammenhang zw. Y und X $\hat{=}$ Steigung 0")

$$H_0: \beta_1 = b$$

$$H_1: \beta_1 \begin{matrix} > \\ < \\ \neq \end{matrix} b$$

② Teststatistik-Wert

$$t_{\text{value}} = \frac{\hat{\beta}_1 - b}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{SS_{xx}}}} = \frac{\text{estimate} - b}{\text{Std. error}} \quad \underbrace{H_0}_{\text{Wert bei } H_0} \quad t_{n-2}$$

③ Kritischer Wert: $CV = t_{n-2, \alpha}$

④ Testentscheid (analog zu z-Tests)

Weitere Formeln und Kenngrößen:

$$\text{Bestimmtheitsmass } R^2 = \frac{SSR}{SS_{yy}} = \frac{SSR}{SSR + SSE} = (r_{xy})^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}$$

$$SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$SS_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = SSR + SSE = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

R Ausdruck für Einfache Lineare Regression:

```
> x <- c(10,8,15,20)
> y <- c(125,132,144,154)
> fs09<-lm(y~x)
> aov(fs09)
```

Call:

```
aov(formula = fs09)
```

Terms:

Sum of Squares $\overset{SSR}{426.0526}$ x Residuals $\overset{SSE}{68.6974}$
 Deg. of Freedom 1 2 $n-2$

Residual standard error $\overset{\hat{\sigma}}{5.861} = \sqrt{\frac{SSE}{n-2}}$

Estimated effects may be unbalanced

```
> summary(fs09)
```

Call:

```
lm(formula = y ~ x)
```

Residuals:

1	2	3	4
-6.5476	4.8847	1.3718	0.2911

2. "einseitiger p-Wert"

$2 \cdot P_{W_r} = 2 \cdot P_{W_e}$

||

2-seitiger p-Wert

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept) $\hat{\beta}_0$	109.3862	8.8375	12.378	0.00646 **
x $\hat{\beta}_1$	2.2161	0.6292	3.522	0.07202

$t \text{ value} = \frac{\text{Estimate} - b}{\text{Std. Error}}$

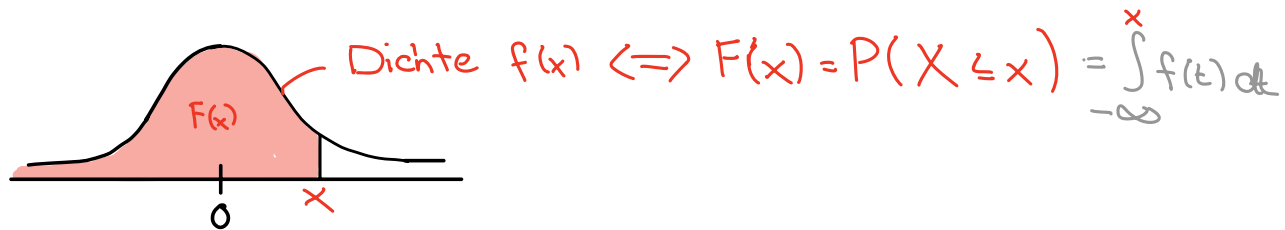
Residual standard error: 5.861 on 2 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.8611, Adjusted R-squared: 0.7917

F-statistic: 12.4 on 1 and 2 DF, p-value: 0.07202

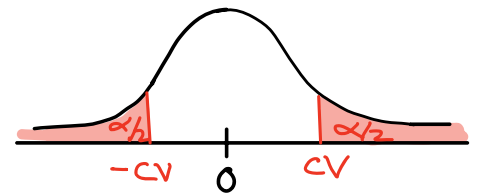
Gl. nach fehlendem Wert auflösen

$$R^2 = \frac{SSR}{SSR + SSE} = (r_{xy})^2$$



Standard-Normalverteilung $x \triangleq \text{Quantile}$

x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$
-4.00	0.0000	-1.10	0.1357	0.02	0.5080	1.12	0.8686
-3.90	0.0000	-1.08	0.1401	0.04	0.5160	1.14	0.8729
-3.80	0.0001	-1.06	0.1446	0.06	0.5239	1.16	0.8770
-3.70	0.0001	-1.04	0.1492	0.08	0.5319	1.18	0.8810
-3.60	0.0002	-1.02	0.1539	0.10	0.5398	1.20	0.8849
-3.50	0.0002	-1.00	0.1587	0.12	0.5478	1.22	0.8888
-3.40	0.0003	-0.98	0.1635	0.14	0.5557	1.24	0.8925
-3.30	0.0005	-0.96	0.1685	0.16	0.5636	1.26	0.8962
-3.20	0.0007	-0.94	0.1736	0.18	0.5714	1.28	0.8997
-3.10	0.0010	-0.92	0.1788	0.20	0.5793	1.30	0.9032
-3.00	0.0013	-0.90	0.1841	0.22	0.5871	1.32	0.9066
-2.90	0.0019	-0.88	0.1894	0.24	0.5948	1.34	0.9099
-2.80	0.0026	-0.86	0.1949	0.26	0.6026	1.36	0.9131
-2.70	0.0035	-0.84	0.2005	0.28	0.6103	1.38	0.9162
-2.60	0.0047	-0.82	0.2061	0.30	0.6179	1.40	0.9192
-2.50	0.0062	-0.80	0.2119	0.32	0.6255	1.42	0.9222
-2.45	0.0071	-0.78	0.2177	0.34	0.6331	1.44	0.9251
-2.40	0.0082	-0.76	0.2236	0.36	0.6406	1.46	0.9279
-2.35	0.0094	-0.74	0.2296	0.38	0.6480	1.48	0.9306
-2.30	0.0107	-0.72	0.2358	0.40	0.6554	1.50	0.9332
-2.25	0.0122	-0.70	0.2420	0.42	0.6628	1.55	0.9394
-2.20	0.0139	-0.68	0.2483	0.44	0.6700	1.60	0.9452
-2.15	0.0158	-0.66	0.2546	0.46	0.6772	1.65	0.9505
-2.10	0.0179	-0.64	0.2611	0.48	0.6844	1.70	0.9554
-2.05	0.0202	-0.62	0.2676	0.50	0.6915	1.75	0.9599
-2.00	0.0228	-0.60	0.2743	0.52	0.6985	1.80	0.9641
-1.95	0.0256	-0.58	0.2810	0.54	0.7054	1.85	0.9678
-1.90	0.0287	-0.56	0.2877	0.56	0.7123	1.90	0.9713
-1.85	0.0322	-0.54	0.2946	0.58	0.7190	1.95	0.9744
-1.80	0.0359	-0.52	0.3015	0.60	0.7257	2.00	0.9772
-1.75	0.0401	-0.50	0.3085	0.62	0.7324	2.05	0.9798
-1.70	0.0446	-0.48	0.3156	0.64	0.7389	2.10	0.9821
-1.65	0.0495	-0.46	0.3228	0.66	0.7454	2.15	0.9842
-1.60	0.0548	-0.44	0.3300	0.68	0.7517	2.20	0.9861
-1.55	0.0606	-0.42	0.3372	0.70	0.7580	2.25	0.9878
-1.50	0.0668	-0.40	0.3446	0.72	0.7642	2.30	0.9893
-1.48	0.0694	-0.38	0.3520	0.74	0.7704	2.35	0.9906
-1.46	0.0721	-0.36	0.3594	0.76	0.7764	2.40	0.9918
-1.44	0.0749	-0.34	0.3669	0.78	0.7823	2.45	0.9929
-1.42	0.0778	-0.32	0.3745	0.80	0.7881	2.50	0.9938
-1.40	0.0808	-0.30	0.3821	0.82	0.7939	2.60	0.9953
-1.38	0.0838	-0.28	0.3897	0.84	0.7995	2.70	0.9965
-1.36	0.0869	-0.26	0.3974	0.86	0.8051	2.80	0.9974
-1.34	0.0901	-0.24	0.4052	0.88	0.8106	2.90	0.9981
-1.32	0.0934	-0.22	0.4129	0.90	0.8159	3.00	0.9987
-1.30	0.0968	-0.20	0.4207	0.92	0.8212	3.10	0.9990
-1.28	0.1003	-0.18	0.4286	0.94	0.8264	3.20	0.9993
-1.26	0.1038	-0.16	0.4364	0.96	0.8315	3.30	0.9995
-1.24	0.1075	-0.14	0.4443	0.98	0.8365	3.40	0.9997
-1.22	0.1112	-0.12	0.4522	1.00	0.8413	3.50	0.9998
-1.20	0.1151	-0.10	0.4602	1.02	0.8461	3.60	0.9998
-1.18	0.1190	-0.08	0.4681	1.04	0.8508	3.70	0.9999
-1.16	0.1230	-0.06	0.4761	1.06	0.8554	3.80	0.9999
-1.14	0.1271	-0.04	0.4840	1.08	0.8599	3.90	1.0000
-1.12	0.1314	-0.02	0.4920	1.10	0.8643	4.00	1.0000
		0.00	0.5000				



t-Verteilung

d.h. zweiseitig (bei H_1)

α oben für KI sowie $\neq$ Tests

df $\rightarrow \nu$

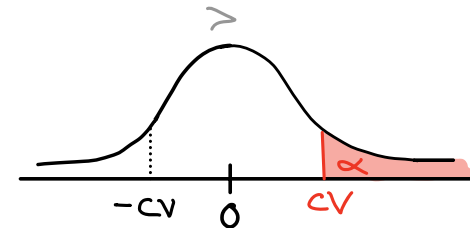
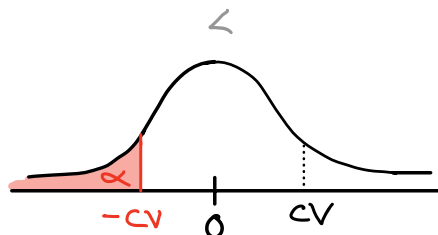
α	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
35	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.591
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
45	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.520
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.496
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
70	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.435
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.416
90	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.402
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.390
1000	1.282	1.645	1.962	2.330	2.581	3.300
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291
*	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0005

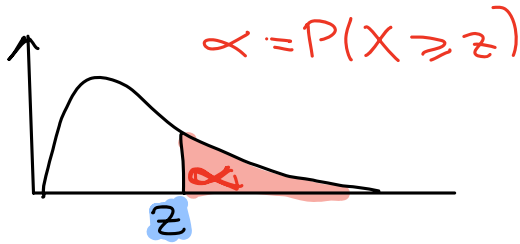
$t_{\nu \rightarrow \infty} = N(0,1)$

d.h. sind Werte aus der $N(0,1)$ -Tabelle

*: Signifikanzschwellen für den einseitigen Test.

das ganze α
 α unten für
einseitige Tests
($<$ oder $>$ bei H_1)

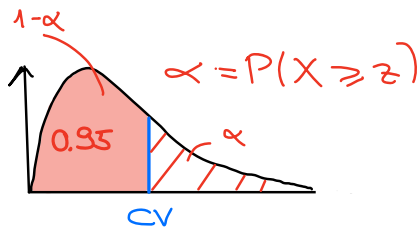




Chiquadrat-Verteilung

Freiheitsgrade
 $\nu = df$

ν	α	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1		1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.828
2		3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	13.816
3		4.642	6.251	7.815	9.837	11.345	16.266
4		5.989	7.779	9.488	11.668	13.277	18.467
5		7.289	9.236	11.070	13.388	15.086	20.515
6		8.558	10.645	12.592	15.033	16.812	22.458
7		9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	24.322
8		11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	26.125
9		12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	27.877
10		13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	29.588
11		14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31.264
12		15.812	18.549	21.026	24.054	26.217	32.909
13		16.985	19.812	22.362	25.472	27.688	34.528
14		18.151	21.064	23.685	26.873	29.141	36.123
15		19.311	22.307	24.996	28.259	30.578	37.697
16		20.465	23.542	26.296	29.633	32.000	39.252
17		21.615	24.769	27.587	30.995	33.409	40.790
18		22.760	25.989	28.869	32.346	34.805	42.312
19		23.900	27.204	30.144	33.687	36.191	43.820
20		25.038	28.412	31.410	35.020	37.566	45.315
21		26.171	29.615	32.671	36.343	38.932	46.797
22		27.301	30.813	33.924	37.659	40.289	48.268
23		28.429	32.007	35.172	38.968	41.638	49.728
24		29.553	33.196	36.415	40.270	42.980	51.179
25		30.675	34.382	37.652	41.566	44.314	52.620
26		31.795	35.563	38.885	42.856	45.642	54.052
27		32.912	36.741	40.113	44.140	46.963	55.476
28		34.027	37.916	41.337	45.419	48.278	56.892
29		35.139	39.087	42.557	46.693	49.588	58.302
30		36.250	40.256	43.773	47.962	50.892	59.703
40		47.3	51.8	55.8	60.4	63.7	73.4
50		58.2	63.2	67.5	72.6	76.2	86.7
60		69.0	74.4	79.1	84.6	88.4	99.6
80		90.4	96.6	101.9	108.1	112.3	124.8
100		111.7	118.5	124.3	131.1	135.8	149.5
150		164.3	172.6	179.6	187.7	193.2	209.3
200		216.6	226.0	234.0	243.2	249.4	267.6
Z_α		0.842	1.282	1.645	2.054	2.326	3.090



Bsp. $F_{2,7} = 9.552$

Anova:

$$v = \frac{\left(\frac{SSa}{k-1} \right)}{\left(\frac{SSE}{n-k} \right)}$$

in meiner
Verteilungs-
Zus'fassung
 $F_{m,n}$

TABELLE: $F_{(q_1, q_2)}$ -Verteilung für ein Signifikanzniveau von 5%

Nenner- Freiheitsgr.		$m =$ Zähler Freiheitsgrade																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30					
11	1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	245.9	248.0	250.1					
	2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.43	19.45	19.46					
	3	10.13	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786	8.703	8.660	8.617					
	4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964	5.858	5.803	5.746					
	5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735	4.619	4.558	4.496					
	6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060	3.938	3.874	3.808					
	7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637	3.511	3.445	3.376					
	8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347	3.218	3.150	3.079					
	9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137	3.006	2.936	2.864					
	10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978	2.845	2.774	2.700					
12	11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854	2.719	2.646	2.570					
	12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753	2.617	2.544	2.466					
	13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671	2.533	2.459	2.380					
	14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602	2.463	2.388	2.308					
	15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544	2.403	2.328	2.247					
	16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494	2.352	2.276	2.194					
	17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450	2.308	2.230	2.148					
	18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412	2.269	2.191	2.107					
	19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378	2.234	2.155	2.071					
	20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348	2.203	2.124	2.039					
13	21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321	2.176	2.096	2.010					
	22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297	2.151	2.071	1.984					
	23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275	2.128	2.048	1.961					
	24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255	2.108	2.027	1.939					
	25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236	2.089	2.007	1.919					
	26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.265	2.220	2.072	1.990	1.901					
	27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250	2.204	2.056	1.974	1.884					
	28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.190	2.041	1.959	1.869					
	29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177	2.027	1.945	1.854					
	30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165	2.015	1.932	1.841					
14	31	4.160	3.305	2.911	2.679	2.523	2.409	2.323	2.255	2.199	2.153	2.003	1.920	1.828					
	32	4.149	3.295	2.901	2.668	2.512	2.399	2.313	2.244	2.189	2.142	1.992	1.908	1.817					
	33	4.139	3.285	2.892	2.659	2.503	2.389	2.303	2.235	2.179	2.133	1.982	1.898	1.806					
	34	4.130	3.276	2.883	2.650	2.494	2.380	2.294	2.225	2.170	2.123	1.972	1.888	1.795					
	35	4.121	3.267	2.874	2.641	2.485	2.372	2.285	2.217	2.161	2.114	1.963	1.878	1.786					
	36	4.113	3.259	2.866	2.634	2.477	2.364	2.277	2.209	2.153	2.106	1.954	1.870	1.776					
	37	4.105	3.252	2.859	2.626	2.470	2.356	2.270	2.201	2.145	2.098	1.946	1.861	1.768					
	38	4.098	3.245	2.852	2.619	2.463	2.349	2.262	2.194	2.138	2.091	1.939	1.853	1.760					
	39	4.091	3.238	2.845	2.612	2.456	2.342	2.255	2.187	2.131	2.084	1.931	1.846	1.752					
	40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077	1.924	1.839	1.744					
15	41	4.079	3.226	2.833	2.600	2.443	2.330	2.243	2.174	2.118	2.071	1.918	1.832	1.737					
	42	4.073	3.220	2.827	2.594	2.438	2.324	2.237	2.168	2.112	2.065	1.912	1.826	1.731					
	43	4.067	3.214	2.822	2.589	2.432	2.318	2.232	2.163	2.106	2.059	1.906	1.820	1.724					
	44	4.062	3.209	2.816	2.584	2.427	2.313	2.226	2.157	2.101	2.054	1.900	1.814	1.718					
	45	4.057	3.204	2.812	2.579	2.422	2.308	2.221	2.152	2.096	2.049	1.895	1.808	1.713					
	50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026	1.871	1.784	1.687					
	55	4.016	3.165	2.773	2.540	2.383	2.269	2.181	2.112	2.055	2.008	1.852	1.764	1.666					
	60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993	1.836	1.748	1.649					
	70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969	1.812	1.722	1.622					
	80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951	1.793	1.703	1.602					
16	90	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986	1.938	1.779	1.688	1.586					
	100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927	1.768	1.676	1.573					
	200	3.888	3.041	2.650	2.417	2.259	2.144	2.056	1.985	1.927	1.878	1.717	1.623	1.516					
	400	3.865	3.018	2.627	2.394	2.237	2.121	2.032	1.962	1.903	1.854	1.691	1.597	1.488					
	500	3.860	3.014	2.623	2.390	2.232	2.117	2.028	1.957	1.899	1.850	1.686	1.592	1.482					
	1000	3.851	3.005	2.614	2.381	2.223	2.108	2.019	1.948	1.889	1.840	1.676	1.581	1.471					

Interpretation: Die Tabelle liefert für verschiedene Zähler- (1. Zeile) und Nennerfreiheitsgrade (1. Spalte) die kritischen F_c Werte einer F -verteilten Zufallsvariablen für ein Signifikanzniveau von 5%. Quelle: Die Tabelle wurde mit der Excel-Funktion FINV erzeugt.

Beispiel: Für 3 Zähler- und 10 Nennerfreiheitgrade ist der kritische F -Wert $F_{0,05} = 3.708$, das heißt

