

Fehler 1. Art (α) und 2. Art (β)

FS22 - Aufgabe 5B:

Eine Münzfirma behauptet, dass die von ihnen produzierten Münzen fair sind. Jemand behauptet aber, die Wahrscheinlichkeit für Kopf sei 0.7. Sie müssen den Fall nun untersuchen.

- a) Wie werden Sie die Hypothesen für einen statistischen Test wählen?
- b) Sie werden einen Test machen, bei dem Sie die Münze 20 mal werfen. Wenn es mehr als 13 mal Kopf gibt, nehmen Sie $\mathcal{H}_1$ an, sonst $\mathcal{H}_0$. Wie gross ist hierbei das α , wie gross das β ? Wir stellen Ihnen hierzu folgende Werte von R zur Verfügung (Sie brauchen nicht alle): `pbinom(13,20,0.5)=0.942`, `pbinom(14,20,0.5)=0.979`, `pbinom(6,20,0.5)=0.0577`, `pbinom(7,20,0.5)=0.132`, `pbinom(13,20,0.7)=0.392`, `pbinom(14,20,0.7)=0.584`, `binom(6,20,0.7)=0.000261`, `pbinom(7,20,0.7)=0.00128`.
- c) Es gab nun bei der Durchführung des Tests den Wert 14. Wie entscheiden Sie? Wie gross ist der P-Wert? Wir stellen Ihnen hierzu folgende Werte von R zur Verfügung (Sie brauchen nicht alle): `pbinom(13, 20, 0.5)=0.942`, `pbinom(14, 20, 0.5)=0.979`, `pbinom(13,20,0.7)=0.392`, `pbinom(14,20,0.7)=0.584`.

Lösung:

- a) $\mathcal{H}_0 : p = 0.5$, $\mathcal{H}_1 : p = 0.7$ (in dubio pro reo)
- b) $\alpha = P[X \geq 14] = 1 - \text{pbinom}(13, 20, 0.5) = 0.058$
 $\beta = P[Y < 14] = \text{pbinom}(13, 20, 0.7) = 0.392$
- c) $\mathcal{H}_1$ annehmen P-Wert = $P[X \geq 14] = 0.058$

FS22 - Aufgabe 5A:

Eine Münzfirma behauptet, dass die von ihnen produzierten Münzen fair sind. Jemand behauptet aber, die Wahrscheinlichkeit für Kopf sei 0.6. Sie müssen den Fall nun untersuchen.

- a) Wie werden Sie die Hypothesen für einen statistischen Test wählen?
- b) Sie werden einen Test machen, bei dem Sie die Münze 20 mal werfen. Wenn es mehr als 13 mal Kopf gibt, nehmen Sie $\mathcal{H}_1$ an, sonst $\mathcal{H}_0$. Wie gross ist hierbei das α , wie gross das β ? Wir stellen Ihnen hierzu folgende Werte von R zur Verfügung (Sie brauchen nicht alle): `pbinom(13,20,0.5)=0.942`, `pbinom(14,20,0.5)=0.979`, `pbinom(6,20,0.5)=0.0577`, `pbinom(7,20,0.5)=0.132`, `pbinom(13,20,0.6)=0.75`, `pbinom(14,20,0.6)=0.874`, `binom(6,20,0.6)=0.00647`, `pbinom(7,20,0.6)=0.021`.
- c) Es gab nun bei der Durchführung des Tests den Wert 14. Wie entscheiden Sie? Wie gross ist der P-Wert? Wir stellen Ihnen hierzu folgende Werte von R zur Verfügung (Sie brauchen nicht alle): `pbinom(13, 20, 0.5)=0.942`, `pbinom(14, 20, 0.5)=0.979`, `pbinom(13,20,0.6)=0.75`, `pbinom(14,20,0.6)=0.874`.

Lösung:

- a) $\mathcal{H}_0 : p = 0.5$, $\mathcal{H}_1 : p = 0.6$ (in dubio pro reo)
- b) $\alpha = P[X \geq 14] = 1 - \text{pbinom}(13, 20, 0.5) = 0.058$
 $\beta = P[Y < 14] = \text{pbinom}(13, 20, 0.6) = 0.75$
- c) $\mathcal{H}_1$ annehmen P-Wert = $P[X \geq 14] = 0.058$

Rep-FS21 - Aufgabe 5:

- a) X sei unter $\mathcal{H}_0$ eine $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsgrösse und unter $\mathcal{H}_1$ eine $\mathcal{N}(2, 1)$ -Zufallsgrösse. Warum wählt man den Ablehnungsbereich der Nullhypothese in einer solchen Situation rechts und nicht wo anders?
- b) In der Vorlesung MAT 183 galt stets: a) $\alpha + \beta = 1$ oder b) $\alpha = \frac{1}{\beta}$ oder c) je grösser das α , desto kleiner das β . Genau eine Antwort ist richtig, welche?
- c) Eine Stichprobe komme unter $\mathcal{H}_0$ von einer $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsgrösse, unter $\mathcal{H}_1$ von einer $\mathcal{N}(2, 1)$ -Zufallsgrösse. Der Ablehnbereich der Nullhypothese wird rechts gewählt, ab einer gewissen Schranke. Es gelte $n = 9$ und $\bar{x} = 1.8$. Wie gross ist der P-Wert? Wir wollen die Rechnungen sehen.

Lösung:

- a) bei gegebenem α ist das β dann am kleinsten
 b) Antwort c) c) $P[\bar{X} \geq 1.8] = P[\mathcal{N}(0, \frac{1}{9}) \geq 1.8] = 1 - F(5.4) = 0$

FS21 - Aufgabe 6B:

Eine Zufallsgrösse X sei unter $\mathcal{H}_0$ eine $\text{Bin}(3, 0.5)$ -Zufallsgrösse und unter $\mathcal{H}_1$ eine $\text{Bin}(3, 0.25)$ -Zufallsgrösse.

- a) Jemand macht folgenden Test: Wenn $X = 0$, dann nimmt man $\mathcal{H}_1$ an, wenn $X > 0$, dann nimmt man $\mathcal{H}_0$ an. Berechnen Sie das α und das β .
- b) Jemand anderes macht folgenden Test: Wenn $X = 3$, dann nimmt man $\mathcal{H}_1$ an, wenn $X \leq 2$, dann nimmt man $\mathcal{H}_0$ an. Im Vergleich zum Test in a), welcher ist zu bevorzugen und warum?
- c) Allgemein: Was ist der Zusammenhang zwischen Fehler 2. Art und Risiko 2. Art?

Lösung:

- a) $\alpha = P[\text{Bin}(3, 0.5) = 0] = 0.125$, $\beta = P[\text{Bin}(3, 0.25) > 0] = \frac{37}{64}$
 b) gleiches α , aber $\beta = \frac{63}{64} > \frac{37}{64} = \beta$ aus a) $\rightarrow$ a) ist besser
 c) Risiko 2. Art = Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art

FS21 - Aufgabe 6A:

Eine Zufallsgrösse X sei unter $\mathcal{H}_0$ eine $\text{Bin}(3, 0.5)$ -Zufallsgrösse und unter $\mathcal{H}_1$ eine $\text{Bin}(3, 0.75)$ -Zufallsgrösse.

- a) Jemand macht folgenden Test: Wenn $X = 3$, dann nimmt man $\mathcal{H}_1$ an, wenn $X < 3$, dann nimmt man $\mathcal{H}_0$ an. Berechnen Sie das α und das β .
- b) Jemand anderes macht folgenden Test: Wenn $X = 0$, dann nimmt man $\mathcal{H}_1$ an, wenn $X \geq 1$, dann nimmt man $\mathcal{H}_0$ an. Im Vergleich zum Test in a), welcher ist zu bevorzugen und warum?
- c) Allgemein: Was ist der Zusammenhang zwischen Fehler 1. Art und Risiko 1. Art?

Lösung:

- a) $\alpha = P[\text{Bin}(3, 0.5) = 3] = 0.125$, $\beta = P[\text{Bin}(3, 0.75) < 3] = \frac{37}{64}$
 b) gleiches α , aber $\beta = \frac{63}{64} > \frac{37}{64} = \beta$ aus a) $\rightarrow$ a) ist besser
 c) Risiko 1. Art = Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art

Rep-FS20 - Aufgabe 5:

Eine Milchabfüllmaschine ist pro Flasche auf 1000 Milliliter eingestellt. Die Abweichung hiervon werde mit einer Normalverteilung modelliert. Die Streuung σ ist bekannt und zwar 1 Milliliter. Damit haben wir unter $\mathcal{H}_0$ eine $\mathcal{N}(1000, 1)$ -Verteilung bei einer einzelnen Abfüllung. Melker Seppli nimmt 5 Flaschen und misst die Gesamtmenge. Wenn diese kleiner als 4995 Milliliter ist, geht er davon aus, dass die Füllmenge zu klein eingestellt ist. Wenn es zu viel Milch hat, macht das nichts - er will den Kunden einfach nicht zu wenig Milch geben.

- a) Wie gross ist das α ?
- b) Nun gibt es genau 4996 Milliliter Milch; wie gross ist der P-Wert?
- c) Wo muss Seppli die Grenze setzen, damit er einen zweiseitigen Test zum Niveau $\alpha = 5\%$ hat?

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } \alpha &= F(-5/\sqrt{5}) = 0.01267 & \text{b) P-Wert} &= F(-4/\sqrt{5}) = 0.0368 \\ \text{c) } F\left(\frac{a-5000}{\sqrt{5}}\right) &= 0.975 \rightarrow a = \sqrt{5} \cdot 1.96 + 5000 = 5004.383 \end{aligned}$$

FS20 - Aufgabe 8a:

Trudi möchte testen, ob bei einer $\text{Bin}(3, p)$ -Zufallsgrösse das $p = 0.5$ ist ($\mathcal{H}_0$) oder $p = 0.9$ ($\mathcal{H}_1$). Dazu bekommt sie nur eine Zahl aus der Zufallsgrösse. Falls diese grösser oder gleich a ist, nimmt sie $\mathcal{H}_1$ an, sonst $\mathcal{H}_0$.

Sei nun $a = 2$. Wie gross ist das α , wie gross das β ?

Lösung:

$$\begin{aligned} \alpha &= P[\text{Bin}(3, 0.5) \geq 2] = P[X = 2] + P[X = 3] = 0.5 \\ \beta &= P[\text{Bin}(3, 0.9) < 2] = P[X = 1] + P[X = 0] = 0.028 \end{aligned}$$

FS20 - Aufgabe 8b:

Trudi möchte testen, ob bei einer $\text{Po}(\lambda)$ -Zufallsgrösse das $\lambda = 2$ ist ($\mathcal{H}_0$) oder $\lambda = 5$ ($\mathcal{H}_1$). Dazu bekommt sie nur eine Zahl aus der Zufallsgrösse. Falls diese grösser oder gleich a ist, nimmt sie $\mathcal{H}_1$ an, sonst $\mathcal{H}_0$.

Sei nun $a = 3$. Wie gross ist das α , wie gross das β ?

Lösung:

$$\begin{aligned} \alpha &= P[\text{Po}(2) \geq 3] = 1 - P[X = 2] - P[X = 1] - P[X = 0] = 0.3233 \\ \beta &= P[\text{Po}(5) < 3] = P[X = 2] + P[X = 1] + P[X = 0] = 0.12465 \end{aligned}$$

FS20 - Aufgabe 8c:

Trudi möchte testen, ob bei einer $\text{Ge}(p)$ -Zufallsgrösse das $p = 0.9$ ist ($\mathcal{H}_0$) oder $p = 0.5$ ($\mathcal{H}_1$). Dazu bekommt sie nur eine Zahl aus der Zufallsgrösse. Falls diese grösser oder gleich a ist, nimmt sie $\mathcal{H}_1$ an, sonst $\mathcal{H}_0$.

Sei nun $a = 3$. Wie gross ist das α , wie gross das β ?

Lösung:

$$\begin{aligned} \alpha &= P[\text{Ge}(0.9) \geq 3] = 1 - P[X = 2] - P[X = 1] = 0.01 \\ \beta &= P[\text{Ge}(0.5) < 3] = P[X = 2] + P[X = 1] = 0.75 \end{aligned}$$

FS20 - Aufgabe 8d:

Trudi möchte testen, ob bei einer $\exp(\lambda)$ -Zufallsgrösse das $\lambda = 5$ ist ($\mathcal{H}_0$) oder $\lambda = 2$ ($\mathcal{H}_1$). Dazu bekommt sie nur eine Zahl aus der Zufallsgrösse. Falls diese grösser oder gleich a ist, nimmt sie $\mathcal{H}_1$ an, sonst $\mathcal{H}_0$.

Sei nun $a = \frac{1}{3}$. Wie gross ist das α , wie gross das β ?

Lösung:

$$\alpha = 1 - P[\exp(5) < \frac{1}{3}] = 1 - F(1/3) = e^{-5/3} = 0.1889$$

$$\beta = P[\exp(2) < \frac{1}{3}] = F(1/3) = 1 - e^{-2/3} = 0.4866$$

FS20 - Aufgabe 8e:

Trudi möchte testen, ob bei einer $\text{Bin}(n, 1/3)$ -Zufallsgrösse $n = 3$ ist ($\mathcal{H}_0$) oder $n = 5$ ($\mathcal{H}_1$). Dazu bekommt sie nur eine Zahl aus der Zufallsgrösse. Falls diese grösser oder gleich a ist, nimmt sie $\mathcal{H}_1$ an, sonst $\mathcal{H}_0$.

Sei nun $a = 2$. Wie gross ist das α , wie gross das β ?

Lösung:

$$\alpha = P[\text{Bin}(3) \geq 2] = P[X = 2] + P[X = 3] = 0.2593$$

$$\beta = P[\text{Bin}(5) < 2] = P[X = 1] + P[X = 0] = 0.4609$$

Rep-FS19 - Aufgabe 5:

Trudi hat 2 Arten von Münzen: faire Münzen (A) und solche, bei denen Kopf mit Wahrscheinlichkeit 0.8 vorkommt (B). Jetzt hat sie eine solche Münze zur Hand und weiss nicht mehr, von welcher Art diese ist. Um dies herauszufinden, wirft sie die Münze 4 Mal. Wenn es mindestens 3 Mal Kopf gibt, geht sie davon aus, dass es eine B-Münze ist ($\mathcal{H}_1$). Sonst nimmt sie an, dass es eine A-Münze ist ($\mathcal{H}_0$).

a) Wie gross ist das α , wie gross das β ?

b) Nun gibt es genau einmal Kopf in 4 Würfeln. Wie gross ist der P-Wert?

Lösung:

$$\text{a) } \alpha = P(X \geq 3) = 5/16, \quad \beta = P(Y \leq 2) \approx 0.1808$$

$$\text{b) P-Wert} = P(X \geq 1) = 15/16$$

FS19 - Aufgabe 5:

Seppli möchte testen, ob bei einer $\exp(\lambda)$ -Zufallsgrösse das $\lambda = 1$ ist ($\mathcal{H}_0$) oder doch $\lambda = 2$ ist ($\mathcal{H}_1$). Dazu bekommt er nur eine Zahl aus der Zufallsgrösse. Falls diese grösser a , wo $a > 0$, ist, nimmt er $\mathcal{H}_0$ an, sonst $\mathcal{H}_1$.

a) Weshalb ist der Entscheid grundsätzlich richtig, $\mathcal{H}_1$ bei eher kleinen Werten anzunehmen und $\mathcal{H}_0$ bei eher grossen Werten?

b) Sei nun $a = 1$. Wie gross ist das α , wie gross das β ?

c) Wie muss man a wählen, damit der Fehler 1. Art (α) genau 5 % ist?

Lösung:

a) mit $E(X)$ oder Bedeutung von "Rate" argumentieren

$$\text{b) } \alpha = 1 - e^{-1} = 0.632, \quad \beta = e^{-2} = 0.135 \quad \text{c) } a = -\ln(0.95) = 5.13\%$$

FS18 - Aufgabe 5:

Peter möchte testen, ob bei einer $\text{Bin}(3, p)$ -Zufallsgrösse das $p = 0.8$ ist ($\mathcal{H}_0$) oder doch $p = 0.5$ ist ($\mathcal{H}_1$). Dazu bekommt er nur eine Zahl aus der Zufallsgrösse. Falls diese gleich 3 ist, nimmt er $\mathcal{H}_0$ an, sonst $\mathcal{H}_1$.

a) Wie gross ist das α ?

b) Jetzt ändert er seine Strategie: Gibt es eine Zahl kleiner als 3, wird er nach wie vor $\mathcal{H}_1$ annehmen.

Aber wenn eine 3 kommt, wirft er diesmal zusätzlich eine faire Münze. Gibt es Kopf, so wird er $\mathcal{H}_0$ annehmen, gibt es Zahl, so wird er $\mathcal{H}_1$ annehmen. Wie ist jetzt das α ?

c) Spielt es für obige Teilaufgaben eine Rolle, ob unter $\mathcal{H}_1$ $p = 0.5$ ist oder zum Beispiel $p = 0.6$?

Lösung:

a) 0.488 b) 0.744 c) Nein. (nur $\mathcal{H}_0$)

Rep-FS17 - Aufgabe 6:

Hansli glaubt, dass 2 Würfel verfälscht sind und tendenziell eher zu grosse Werte liefern. Er will das jetzt testen, indem er die beiden Würfel je einmal wirft und die Augensumme zusammenzählt. Falls der Wert der Summe mindestens 9 ist, wird er schliessen, dass die Würfel nicht fair sind. Wie ist sein α , also sein Fehler 1. Art in diesem Setting?

Lösung:

$\alpha = 5/18$

FS17 - Aufgabe 5:

Barbara möchte testen, ob eine normalverteilte Zufallsgrösse mit Varianz 1 Mittelwert 0 hat oder nicht (zweiseitig). Sie bekommt dazu zwei Datenpunkte x_1, x_2 , welche unabhängig generiert wurden. Jetzt nimmt sie die Summe der beiden Datenpunkte. Wenn der Absolutbetrag der Summe grösser als 2.2 ist, wird sie die $\mathcal{H}_0$ -Hypothese verwerfen. Sonst akzeptiert sie diese.

[Tipp: wie ist die Summe von unabhängigen Normalverteilungen verteilt?]

a) Wie gross ist das α ?

b) Beim nachfolgenden Test bekommt sie den Wert 2.5. Wie gross ist der P-Wert dieses Ereignisses?

Lösung:

a) $\alpha = 1 - (F(1.556) - F(-1.556)) \approx 0.12$ b) P-Wert $1 - (F(1.768) - F(-1.768)) \approx 0.0768$

Rep-FS16 - Aufgabe 7:

a) Hansli hält nichts vom LLN und von Zufällen und denkt, dass er bereits mit wenigen Daten den Durchblick hat.

Konkret hat er eine Glühbirne, welche im Durchschnitt laut Herstellerangaben mindestens 100 Stunden brennen sollte, bis sie kaputt geht (unterstellen Sie exponentialverteilte Lebenszeit).

Er lehnt diese Hypothese ab, falls die Glühbirne weniger als 95 Stunden brennen sollte. Mit welchem α rechnet er?

b) Trudi ist die Freundin von Hansli und vom gleichen Holz geschnitzt. In der gleichen Situation wie in a) geht die Glühbirne nach 92 Stunden kaputt. Wie gross ist der P-Wert?

Lösung:

a) $\alpha = 1 - e^{-0.95} \approx 0.613$ b) P-Wert $= 1 - e^{-0.92} \approx 0.601$

FS16 - Aufgabe 5:

Peter möchten testen, ob eine Münze fair ist oder nicht. Dazu wirft er die Münze 8 mal. Wenn die Anzahl Kopf in der Menge $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ liegt, akzeptiert er die $\mathcal{H}_0$ -Hypothese, dass die Münze fair ist. Sonst verwirft er diese. [Tipp: im Storrer haben Sie hinten die entsprechende Bin-Tabelle]

1.) Wie gross ist das α ?

2.) Beim nachfolgenden Test bekommt er den Wert 6. Wie gross ist der P-Wert dieses Ereignisses?

Lösung:

1.) $\alpha = 0.0702 = 7.02\%$ 2.) P-Wert = $0.289 = 28.9\%$

Rep-FS15 - Aufgabe 7:

a) Sie testen mit einer Einerstichprobe ($n = 1$), ob eine Zufallsgrösse $U[0, 1]$ ist ($\mathcal{H}_0$) oder $U[0, \theta]$, wo $\theta > 1$ ($\mathcal{H}_1$).

Als Teststatistik nehmen Sie einfach die Realisation x von X und nehmen bei grossen Werten $\mathcal{H}_1$ an, bei kleinen $\mathcal{H}_0$. Sie erhalten jetzt 0.97. Wie gross ist der P-Wert?

b) Sie nehmen jetzt eine Zweierstichprobe ($n = 2$), um zu testen, ob eine Zufallsgrösse $U[0, 1]$ ist ($\mathcal{H}_0$) oder $U[0, \theta]$, wo $\theta > 1$ ($\mathcal{H}_1$). Als Teststatistik nehmen Sie einfach die Summe der Realisation $x + y$ von $X + Y$ und nehmen bei grossen Werten $\mathcal{H}_1$ an, bei kleinen $\mathcal{H}_0$ (die einzelnen Zahlen x und y seien unbeobachtet). Sie erhalten jetzt 1.96. Wie gross ist der P-Wert? Benutzen Sie dazu eine geometrische Überlegung im $\mathbb{R}^2$ (das Resultat ist *nicht* 0.04)!

Lösung:

a) 0.03 b) 0.0008

Rep-FS13 - Aufgabe 7:

Die Anzahl Zerfälle eines radioaktiven Klumpen im Zeitintervall $[0, 1]$ ist poissonverteilt mit Parameter λ . Sie wollen jetzt mit einem einzigen Versuch testen, ob $\mathcal{H}_0 : \lambda = 1$ oder $\mathcal{H}_1 : \lambda > 1$. $\lambda < 1$ sei ausgeschlossen. Wenn 3 oder mehr Zerfälle stattfinden, lehnen Sie die Nullhypothese ab. Mit was für einem α (= Fehler 1. Art) rechnen Sie dabei?

Lösung:

$P(X \geq 3) \approx 0.0803$

FS13 - Aufgabe 5:

1.) In einem Computerausdruck eines Statistikpakets finden Sie bei einem T-Test den Wert der T-Statistik von 32.85. Werden Sie in einem einseitigen Test mit $\alpha = 0.05$ die Nullhypothese annehmen oder verwerfen?

2.) Luchsinger behauptet, er könne mit mehr als 50% Wahrscheinlichkeit voraussagen, ob bei einer fairen Münze Kopf oder Zahl kommt. Sie wollen das jetzt testen und werden 6 mal eine Münze werfen. Wenn er in 5 oder 6 Fällen richtig voraussagt, werden Sie ihm dies Fähigkeit zutrauen. Mit was für einem α haben Sie hierbei getestet?

Lösung:

1.) verwerfe $\mathcal{H}_0$ da $32.85 > \text{alle } t_{\alpha, n-1}$ 2.) $\alpha = \frac{7}{64} \approx 10.94\%$

Rep-FS12 - Aufgabe 7:

Aufgrund der historischen Erfahrung modellieren Sie die Anzahl Flugzeugabstürze pro Jahr einer grossen Airline mit einer Poisson-Zufallsgrösse mit Parameter 1. Sie wollen mit einem einfachen Test überwachen, ob in einem bestimmten Jahr eher viele Flugzeuge abstürzen. Dazu schlagen Sie Alarm, sobald mehr als 2 Flugzeuge abstürzen. Geben Sie die passenden Null- und Alternativhypothesen an. Wie gross ist das α , dass Sie hier benutzen?

Lösung:

$$\alpha = 1 - e^{-1} \cdot \frac{1^2}{2!} - e^{-1} \cdot \frac{1^1}{1!} - e^{-1} \cdot \frac{1^0}{0!} \approx 0.0803 \approx 8\%.$$

FS12 - Aufgabe 7:

Sie wollen bei einem Würfel einseitig testen, ob die 6 nicht zu selten vorkommt. Sei p die Wahrscheinlichkeit für eine 6. $\mathcal{H}_0 : p = 1/6$ und $\mathcal{H}_1 : p < 1/6$. Sie machen aus Faulheit nur eine einzige Testserie und werfen den Würfel solange, bis die 6 erscheint. Wenn es mindestens 8 mal bis zur ersten 6 dauert, verwerfen Sie $\mathcal{H}_0$. Wie gross ist damit Ihr α , also Ihre Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art in diesem Test?

Lösung:

$$X \sim Ge(1/6) \quad \alpha = P[X \geq 8] = 1 - P[X < 8] = 0.279$$

Rep-FS11 - Aufgabe 7:

Sie bezweifeln, dass eine Münze fair ist. Dazu werfen Sie diese 10 Mal. Wenn die Anzahl Kopf nicht im Intervall $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ zu liegen kommt, verwerfen Sie die Hypothese, dass die Münze fair ist. Was für ein α (Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art) benutzen Sie dabei?

Lösung:

$$\alpha = 0.109 \approx 10.9\%$$

FS11 - Aufgabe 7:

Die Lehrmeinung besagt, dass das radioaktive Jod eine Halbwertszeit von 8.05 Tagen hat. Sie glauben gemerkt zu haben, dass die Halbwertszeit eigentlich grösser ist. Sie schauen jetzt solch ein Jod-Isotop an und messen die Zeit, bis es zerfällt. Falls es mindestens 12 Tage dauert, verwerfen Sie die bis jetzt gültige Hypothese. Was für ein α (Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art) benutzen Sie dabei?

Lösung:

$$\alpha = 0.356 = P[X > 12] \quad \lambda = \ln(2)/T_{1/2}$$

FS10 - Aufgabe 6:

Kartenleser Mike Sheewasser behauptet, dass er bei einer geworfenen Münze mit Wahrscheinlichkeit 0.8 vorhersagen kann, ob es Kopf oder Zahl gibt. Sie bezweifeln das. Man einigt sich auf folgende Testsituation, um dieses Phänomen zu untersuchen: die Münze wird 8 mal geworfen. Wenn Mike mindestens 7 mal exakt den Ausgang vorhersagen kann, attestieren Sie ihm, dass er recht hat. Sonst lehnen Sie seine Behauptung ab.

- a) Formulieren Sie hier sinnvolle Hypothesen.
- b) Wie ist in der Versuchsanordnung des α (Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art)?
- c) Wie ist in der Versuchsanordnung des β (Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art)?
- d) Im Versuch hat Mike 7 mal korrekt vorhergesagt. Wie ist der P-Wert dieses Ereignisses?

Lösung:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } H_0 : p = 0.5, H_1 : p = 0.8 & \text{b) } \alpha = P[\text{Bin}(8, 0.5) \geq 7] = 0.0351 \\ \text{c) } \beta = P[\text{Bin}(8, 0.8) < 7] = 0.4967 & \text{d) } P[\text{Bin}(8, 0.5) \geq 7] = 0.0351 \end{array}$$

FS09 - Aufgabe 6:

Bei einer radioaktiven Probe gehen Sie aus theoretischen Gründen davon aus, dass die Anzahl Zerfälle in den nächsten 10 Sekunden eine Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = 5$ haben sollten. Diese Nullhypothese ($\lambda = 5$) lehnen sie einseitig ab, falls es nur 2 oder weniger Zerfälle geben sollte ($\lambda > 5$ schliessen wir sowieso aus). Mit welchem α arbeiten Sie in solch einem Test?

Lösung:

$$\begin{array}{l} H_0 : \lambda = 5, \quad H_1 : \lambda < 5 \\ \alpha = P[X \leq 2] = 0.125 \end{array}$$