

Konfidenzintervalle und Hypothesentests

Rep-FS22 - Aufgabe 5:

Sie machen in R den unteren Test, der auszugsweise wiedergegeben wurde. Geben Sie genau an:

- a) Welcher Test wurde gemacht (genauer Name und Hypothesen)?
- b) Berechnen Sie d
- c) Wie ist unten der P-Wert für den einseitigen Test $\mathcal{H}_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ vs $\mathcal{H}_1 : \mu_1 > \mu_2$?
- d) Können Sie anhand des unteren Ausdrucks bestimmen, wie gross das α ist?
- e) Wie ist das 90% Konfidenzintervall für die Differenz der Mittelwerte?
- f) Braucht es die gleiche Stichprobengrösse in **a** und **b**?
- g) Unten finden sie $df=6$. Erklären Sie diese Zahl?
- h) Woran erkennen Sie, ob in R die Teststatistik im Zähler $\text{mean(a)} - \text{mean(b)}$ oder $\text{mean(b)} - \text{mean(a)}$ rechnet?

```
> a <- c(2.3, 2.2, 3.2, d)
> b <- c(1.8, 2.2, 2.6, 2.9)
> t.test(a, b, var.equal = TRUE)
t = 1.1316, df = 6, p-value = 0.301
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.6393351 1.7393351
sample estimates:
mean of x mean of y
2.925 2.375
```

Lösung:

- a) 2 Stichproben T-Test, $\mathcal{H}_l : \mu_1 = \mu_2$, $\mathcal{H}_\infty : \mu_1 \neq \mu_2$
- b) $d = 4$ (via Mittelwert) c) $\frac{0.301}{2} = 0.1505$ d) NEIN
- e) $[-0.3943716, 1.494372]$ oder $[-1.494372, 0.3943716]$
- f) Nein g) $df = 6 = 4 + 4 - 2$
- h) da $1.1316 > 0$ und $\bar{a} > \bar{b} \rightarrow \text{mean(a)} - \text{mean(b)}$

Rep-FS22 - Aufgabe 6:

- a) Sie haben eine Dreierstichprobe 1.2, 0.8, 0.7, von der Sie wissen, dass sie aus einer Normalverteilung stammt. Testen Sie zum 5%-Niveau zweiseitig, ob $\mu = 0$ oder nicht.
(bitte entlang des Kochbuchrezeptes aus der Vorlesung - das gibt den halben Punkt aus den 2.5 Punkten).
- b) Berechnen Sie ein 90% Konfidenzintervall in obiger Situation.
- c) Wie lautet der exakte R-Befehl, wenn Sie mit den Zahlen aus a) einen t-Test machen wollen
(entweder nur 1 kombinierter Befehl oder 2 Befehle auf 2 Zeilen).
Bekommen Sie damit auch gleich ein 95%-Konfidenzintervall (Ja/Nein)?
- d) Sie erhalten (in einer anderen Situation als oben) das 95% Konfidenzintervall zu einer Stichprobe vom Umfang 5: [3, 6]. Wie gross ist der Standardfehler?

Lösung:

- a) siehe ML b) [0.453926, 1.346037]
c) `t.test(c(1.2, 0.8, 0.7))` Ja (bekommt man)
oder `a<-c(1.2, 0.8, 0.7)` und `t.test(a)`,
d) Standardfehler = $\frac{1.5}{2.776} = 0.5403458$

Rep-FS22 - Aufgabe 7:

150 Studierende machten eine Prüfung in Mathematik und in Physik. 82 bestanden beide Prüfungen, 26 nur die Mathe und 12 nur die Physik. Der Rest bestand keine der 2 Prüfungen.

- a) Stellen Sie eine Kontingenztafel dazu auf (und vervollständigen Sie hierzu vor allem auch den Datensatz).
- b) Testen Sie mit einem χ^2 -Test auf dem 5%-Niveau, ob die Wahrscheinlichkeiten zu bestehen bei den beiden Prüfungen unabhängig voneinander sind.
- c) In der Vorlesung haben wir zwei Situationen erlebt, in denen man einen χ^2 -Test macht. Die beiden Fragestellungen sind aber verschieden. Beschreiben Sie kurz, was mit welchem der beiden χ^2 -Tests getestet wird.

Lösung:

- a) siehe ML für 2x2 Kontingenztafel.
b) siehe ML für Kochbuchrezept
c) Unabhängigkeitstest: ob zwei Merkmalswerte unabhängig auftreten.
Anpassungstest: ob aktuelle Werte mit vorgegebenen (oder geschätzten) Werten übereinstimmen.

FS22 - Aufgabe 6B:

Die Ernteerträge von 2 Düngemethoden werden verglichen. Mit der ersten Methode waren die Erträge 410, 540, 460, 500; mit der zweiten Methode waren es 445, 465, 512, 540, 570. Setzen Sie Normalverteilung voraus und dass die Varianzen gleich sind.

- a) Untersuchen Sie zum Niveau $\alpha = 5\%$ mit einem statistischen Test die Frage, ob die Mittelwerte gleich sind oder nicht. Tipp: Benutzen Sie das Kochbuchrezept aus dem Skript. Es stehen Ihnen folgende Werte aus R zur Verfügung: `mean(c(410, 540, 470, 500))=477.5`, `mean(c(445,465,512,540,570))=506.4`,
`var(c(410, 540, 470, 500))=3091.667`, `var(c(445,465,512,540,570))=2672.3`.
- b) Berechnen Sie auch das 95%-Konfidenzintervall der Differenz der Mittelwerte.

Lösung:

- a) siehe ML
b) [-113.61208, 55.81208] oder [-55.81208, 113.61208]

FS22 - Aufgabe 6A:

Die Ernteerträge von 2 Düngemethoden werden verglichen. Mit der ersten Methode waren die Erträge 420, 550, 470, 510; mit der zweiten Methode waren es 455, 475, 522, 550, 580. Setzen Sie Normalverteilung voraus und dass die Varianzen gleich sind.

- a) Untersuchen Sie zum Niveau $\alpha = 5\%$ mit einem statistischen Test die Frage, ob die Mittelwerte gleich sind oder nicht. Tipp: Benutzen Sie das Kochbuchrezept aus dem Skript. Es stehen Ihnen folgende Werte aus R zur Verfügung: $\text{mean}(c(420, 550, 470, 510))=487.5$, $\text{mean}(c(455,475,522,550,580))=516.4$, $\text{var}(c(420, 550, 470, 510))=3091.667$, $\text{var}(c(455,475,522,550,580))=2672.3$.
- b) Berechnen Sie auch das 95%-Konfidenzintervall der Differenz der Mittelwerte.

Lösung:

a) siehe ML

b) $[-113.61208, 55.81208]$ oder $[-55.81208, 113.61208]$ **FS21 - Aufgabe 5B:**

Sie testen einen neuen Dünger, indem Sie den neuen Ernteertrag gegen den alten testen. Dazu haben Sie von 6 Messungen $x_1, x_2, \dots, x_6$ mit dem alten Dünger folgende Angaben: $\bar{x} = 450$ und $SS_{xx} = 480$. Beim neuen Dünger haben Sie mit 4 Messungen $y_1, \dots, y_4$ folgende Angaben: $\bar{y} = 495$ und $SS_{yy} = 420$.

- a) Testen Sie mit einem 2-Stichproben-T-Test unter Annahme gleicher Varianzen auf dem 5%-Niveau, ob der neue Dünger besser ist als der alte.
- b) Falls jemand mit völlig korrekten Berechnungen mit einer ANOVA und $k = 2$ diese Aufgabe löst: Welche Beziehung herrscht dann zwischen der Teststatistik u mit ANOVA und der Teststatistik v mit dem 2-Stichproben-T-Test?

Lösung:a) $\mathcal{H}_1 : \mu_1 < \mu_2$, $t = -6.5727 < -1.860 = CV \rightarrow \mathcal{H}_1$ annehmenb) $u = v^2$ **FS21 - Aufgabe 5A:**

Sie testen einen neuen Dünger, indem Sie den neuen Ernteertrag gegen den alten testen. Dazu haben Sie von 5 Messungen $x_1, x_2, \dots, x_5$ mit dem alten Dünger folgende Angaben: $\bar{x} = 420$ und $SS_{xx} = 460$. Beim neuen Dünger haben Sie mit 6 Messungen $y_1, \dots, y_6$ folgende Angaben: $\bar{y} = 450$ und $SS_{yy} = 530$.

- a) Testen Sie mit einem 2-Stichproben-T-Test unter Annahme gleicher Varianzen auf dem 5%-Niveau, ob der neue Dünger besser ist als der alte.
- b) Falls jemand mit völlig korrekten Berechnungen mit einer ANOVA und $k = 2$ diese Aufgabe löst: Welche Beziehung herrscht dann zwischen der Teststatistik u mit ANOVA und der Teststatistik v mit dem 2-Stichproben-T-Test?

Lösung:a) $\mathcal{H}_1 : \mu_1 < \mu_2$, $t = -4.7238 < -1.833 = CV \rightarrow \mathcal{H}_1$ annehmenb) $u = v^2$

Rep-FS20 - Aufgabe 6:

Sie machen in R den unteren Test (vereinfachte Zahlen). Geben Sie genau an

- Welcher Test wurde gemacht (genauer Name und Hypothesen)?
- Berechnen Sie d .
- Wie ist unten der P-Wert für den einseitigen Test nach links?
- Wie ist unten der P-Wert für den einseitigen Test nach rechts?
- Unten finden Sie $t=0.29019$. Mit welcher Formel bekommt man diesen Wert?
- Unten finden Sie $df=8$. Mit welcher Formel bekommt man diesen Wert?

```
> a<-c(4,3,4,1,4,d)
> b<-c(3,3,2,5)
> .....(a,b,var.equal = TRUE)
t = 0.29019, df = 8, p-value = 0.7791
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-1.73663 2.23663
sample estimates:
mean of x mean of y
3.50 3.25
```

Lösung:

a) 2-Stichpr. t -Test, $\mathcal{H}_0 : \mu_1 = \mu_2$, $\mathcal{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ b) $d = 5$

c) $1 - 0.7791/2 = 0.61045$ d) $0.7791/2 = 0.38955$

e) $(\bar{x} - \bar{y}) / \sqrt{(1/m + 1/n) \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}{m+n-2}}$ f) $m + n - 2 = 6 + 4 - 2 = 8$

Rep-FS20 - Aufgabe 7:

Sie werfen einen Würfel 36 mal und erhalten 9 mal eine 1, 4 mal eine 2, 6 mal eine 3, 6 mal eine 4, 8 mal eine 5 und 3 mal eine 6.

- Testen Sie (ohne allfällige Berücksichtigung der Frage b)) mit einem χ^2 -Anpassungstest auf dem Niveau 5%, ob der Würfel fair ist oder nicht. (2 Punkte bei systematischem Vorgehen nach "Kochbuchrezept")
- Welche Voraussetzung müsste streng genommen eigentlich erfüllt sein, damit Sie den χ^2 -Anpassungstest anwenden dürfen? Ist das hier erfüllt?

Lösung:

a) siehe ML

b) alle "erwarteten" Werte müssen ≥ 5 sein. Ja

Rep-FS20 - Aufgabe 8:

Bei zwei Baumschulen wird unter sonst gleichen Bedingungen die Höhe der Bäume nach 10 Jahren gemessen. In Baumschule 1 sind es 17 Bäume mit durchschnittlicher Höhe 12 Meter. Die empirische Standardabweichung beträgt 2 Meter. In Baumschule 2 sind es 13 Bäume mit durchschnittlicher Höhe 11.5 Meter und empirischer Standardabweichung 2.2 Meter. Setzen Sie Normalverteilung und Unabhängigkeit voraus. Testen Sie auf dem 5%-Niveau, ob die Höhen in der Baumschule signifikant voneinander abweichen oder nicht. Machen Sie auch ein 90% KI dazu (Achtung, anderes α). (2 Punkte bei systematischem Vorgehen nach "Kochbuchrezept")

Lösung:

a) siehe ML

b) $[-0.8086155, 1.808615]$ (oder $[-1.808615, 0.8086155]$)**FS20 - Aufgabe 9a:**

In einer Untersuchung von total 72 Personen, je 36 Männer und 36 Frauen, sind genau 8 Männer und genau 6 Frauen Linkshänder. Testen Sie mit einem χ^2 -Test auf Unabhängigkeit auf dem $\alpha = 5\%$ -Niveau, ob Linkshänder sein und Geschlecht unabhängig sind oder nicht.

a) Welchen Wert hat die Teststatistik?

b) Wie entscheiden Sie? ($\mathcal{H}_0$ annehmen oder verwerfen)c) Muss es für den χ^2 -Test auf Unabhängigkeit gleich viele Männer wie Frauen in der Untersuchung haben? (Ja/Nein)**Lösung:**a) TS-Wert = 0.3549 b) $0.3549 < 3.841 \rightarrow \mathcal{H}_0$ behalten c) Nein**FS20 - Aufgabe 9b:**

In einer Untersuchung von total 98 Personen, je 49 Männer und 49 Frauen, nutzen genau 15 Männer und genau 12 Frauen Twitter. Testen Sie mit einem χ^2 -Test auf Unabhängigkeit auf dem $\alpha = 5\%$ -Niveau, ob Twitter-Nutzung und Geschlecht unabhängig sind oder nicht.

a) Welchen Wert hat die Teststatistik?

b) Wie entscheiden Sie? ($\mathcal{H}_0$ annehmen oder verwerfen)c) Muss es für den χ^2 -Test auf Unabhängigkeit gleich viele Männer wie Frauen in der Untersuchung haben? (Ja/Nein)**Lösung:**a) TS-Wert = 0.4601 b) $0.4601 < 3.841 \rightarrow \mathcal{H}_0$ behalten c) Nein

FS20 - Aufgabe 9c:

In einer Untersuchung von total 104 Personen, je 52 Männer und 52 Frauen, sind genau 5 Männer und genau 12 Frauen alleinerziehend. Testen Sie mit einem χ^2 -Test auf Unabhängigkeit auf dem $\alpha = 5\%$ -Niveau, ob alleinerziehend und Geschlecht unabhängig sind oder nicht.

- a) Welchen Wert hat die Teststatistik?
- b) Wie entscheiden Sie? ($\mathcal{H}_0$ annehmen oder verwerfen)
- c) Muss es für den χ^2 -Test auf Unabhängigkeit gleich viele Männer wie Frauen in der Untersuchung haben? (Ja/Nein)

Lösung:a) TS-Wert = 3.4456 b) $3.4456 < 3.841 \rightarrow \mathcal{H}_0$ behalten c) Nein**FS20 - Aufgabe 9d:**

In einer Untersuchung von total 1024 Personen, je 512 Männer und 512 Frauen, sind genau 102 Männer und genau 58 Frauen Raucher. Testen Sie mit einem χ^2 -Test auf Unabhängigkeit auf dem $\alpha = 5\%$ -Niveau, ob Raucher/in sein und Geschlecht unabhängig sind oder nicht.

- a) Welchen Wert hat die Teststatistik?
- b) Wie entscheiden Sie? ($\mathcal{H}_0$ annehmen oder verwerfen)
- c) Muss es für den χ^2 -Test auf Unabhängigkeit gleich viele Männer wie Frauen in der Untersuchung haben? (Ja/Nein)

Lösung:a) TS-Wert = 14.3407 b) $14.3407 > 3.841 \rightarrow \mathcal{H}_0$ verwerfen c) Nein**FS20 - Aufgabe 10a:**

Sie müssen eine Maschine herstellen, die Goldbarren von einem Gewicht von möglichst genau 1kg liefert, möglichst weder mehr noch weniger. Mit einer Stichprobe wollen Sie jetzt testen, ob der Mittelwert stimmt oder nicht. Dabei gehen Sie davon aus, dass die Daten normalverteilt sind.

- a) Welche Hypothese ist hier sinnvoll? i) Einseitig gegen oben? ii) Einseitig gegen unten? iii) Zweiseitig?
- b) Welche Teststatistik wählen Sie (g_i seien die Messwerte)? i) $\sum_{i=1}^n \frac{|g_i - 1|}{n}$; ii) $\sum_{i=1}^n \frac{(g_i - \bar{g})^2}{\sqrt{n}}$; iii) $\frac{\sqrt{n}(\bar{g} - 1)}{\hat{\sigma}}$; iv) $\frac{(\bar{g} - 1)}{\sqrt{n}}$; v) $\sum_{i=1}^n \frac{(g_i - \bar{g})^2}{\sqrt{n-1}}$;
- c) Verteilung der Teststatistik unter $\mathcal{H}_0$?
i) t_n , ii) t_{n-1} , iii) t_{n-2} , iv) t_{n+1} , v) $\mathcal{N}(0, 1)$
- d) Der absolute Wert der Teststatistik sei grösser als der absolute kritische Wert aus obiger Verteilung; werden Sie jetzt die Nullhypothese i) ablehnen oder ii) annehmen?

Lösung:a) zweiseitig b) $\frac{\sqrt{n}(\bar{g} - 1)}{\hat{\sigma}}$ c) t_{n-1} d) ablehnen

FS20 - Aufgabe 10b:

Sie kaufen Prozessoren für Smartphones zweier Hersteller (m bzw. n Stück) und testen ob diese über einen festgelegten Zeitraum die angegebene Leistung liefern ($x_i = 1$ bzw. $y_j = 1$, "Erfolg") oder nicht ($x_i = 0$ bzw. $y_j = 0$, "Misserfolg"). Sie wollen wissen, ob die Prozessoren des einen Herstellers signifikant besser in dem Test abschneiden als diejenigen des anderen Herstellers.

a) Welche Hypothese ist hier sinnvoll? i) Einseitig gegen oben? ii) Einseitig gegen unten? iii) Zweiseitig?

b) Welche Teststatistik wählen Sie? Dabei sei $\hat{p}_1 := \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{m}$, $\hat{p}_2 := \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{n}$.

$$\text{i) } \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{m} - \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{n}; \quad \text{ii) } \sum_{i=1}^m \frac{(x_i - \hat{p}_1)^2}{\sqrt{m}} + \sum_{j=1}^n \frac{(y_j - \hat{p}_2)^2}{\sqrt{n}}; \quad \text{iii) } \frac{\sqrt{mn}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{n\hat{p}_1(1-\hat{p}_1) + m\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}};$$

$$\text{iv) } \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{m+n}}; \quad \text{v) } \sum_{i=1}^m \frac{(x_i - \hat{p}_1)^2}{\sqrt{m-1}} + \sum_{j=1}^n \frac{(y_j - \hat{p}_2)^2}{\sqrt{n-1}}$$

c) Verteilung der Referenzstatistik unter $\mathcal{H}_0$? i) t_{m+n} , ii) t_{m+n-1} , iii) t_{m+n-2} , iv) t_{m+n+1} , v) $\mathcal{N}(0, 1)$

d) Der absolute Wert der Teststatistik sei grösser als der absolute kritische Wert aus obiger Verteilung; werden Sie jetzt die Nullhypothese i) ablehnen oder ii) annehmen?

Lösung:

a) zweiseitig (unklar wer besser/schlechter...)
b) $\frac{\sqrt{mn}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{n\hat{p}_1(1-\hat{p}_1) + m\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}}$ c) $\mathcal{N}(0, 1)$ d) ablehnen

Rep-FS19 - Aufgabe 6:

Sie machen in R den unteren Test. Geben Sie genau an

a) Welcher Test wurde gemacht (genauer Name und Hypothesen)?

b) Berechnen Sie d .

c) Wie ist unten der P-Wert für den einseitigen Test $\mathcal{H}_0 : \mu \leq 0$ vs $\mathcal{H}_1 : \mu > 0$?

d) Unten finden Sie $t = 0.34874$. Mit welcher Formel bekommt man diesen Wert?

e) Wie ist das 99 % Konfidenzintervall für den Mittelwert?

```
> a<-c(-2,3,1,-1, d)
```

```
...
```

```
data: a
```

```
t = 0.34874, df = 4, p-value = 0.7449
```

```
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
```

```
95 percent confidence interval:
```

```
-2.088388 2.688388
```

```
sample estimates:
```

```
mean of x
```

```
0.3
```

Lösung:

a) 1-Stichpr. T -Test, $\mathcal{H}_0 : \mu = 0$, $\mathcal{H}_1 : \mu \neq 0$ b) $d = 0.5$
c) $0.7449/2 = 0.37245$ d) $\sqrt{n}\bar{x}/\hat{\sigma}$, wo $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$.
e) $[-3.661145, 4.261145]$

Rep-FS19 - Aufgabe 7:

Sie werfen eine Münze 150 mal. Dabei kommt es 91 mal zu Kopf und 59 mal zu Zahl. Testen Sie mit einem χ^2 -Anpassungstest auf dem 1 % - Niveau, ob die Münze fair ist oder nicht.

Lösung:

$$\begin{aligned} & \text{a) } \mathcal{H}_0 : p = 0.5 \quad \text{vs} \quad \mathcal{H}_1 : p \neq 0.5, \\ & 6.83 > 6.635 = CV \rightarrow \mathcal{H}_0 \text{ ablehnen.} \end{aligned}$$

Rep-FS19 - Aufgabe 8:

Bei einer alten Operationsmethode 1 überleben von 84 PatientInnen 31 den Eingriff; bei einer neuen Operationsmethode 2 von 66 PatientInnen immerhin 35 den Eingriff. Testen Sie auf dem 1 % - Niveau einseitig mit dem 2-Stichproben-Proportionentest, ob die neue Operationsmethode signifikant besser ist als die alte.

Lösung:

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_0 : p_1 \geq p_2, \quad \mathcal{H}_1 : p_1 < p_2, \\ & 1.99 < 2.33 = CV \text{ oder } CV = -2.33 < -1.99 \rightarrow \mathcal{H}_0 \text{ beibehalten.} \end{aligned}$$

FS19 - Aufgabe 7:

Sie wollen herausfinden, ob ein Würfel fair ist oder nicht. Dazu werfen Sie ihn 60 mal und erhalten:

7 mal eine 1, 8 mal eine 2, 15 mal eine 3, 12 mal die 4, 9 mal eine 5 und 9 mal eine 6.

- a) Testen Sie mit einem χ^2 -Test auf dem 5%-Niveau, ob der Würfel fair ist oder nicht.
- b) Wieso lehnt man beim χ^2 -Anpassungstest die Nullhypothese nur dann ab, wenn es grosse Werte bei der Teststatistik gibt und nicht auch, wenn es sehr kleine Werte gibt?

Lösung:

$$\begin{aligned} & \text{a) } \mathcal{H}_0 : p_i = 1/6, \quad \mathcal{H}_1 : \text{mind. } 2 \ p_i \neq 1/6 \\ & u = 4.4 < 11.07 \rightarrow \mathcal{H}_0 \text{ beibehalten.} \\ & \text{b) siehe Musterlösung} \end{aligned}$$

FS19 - Aufgabe 8:

Sie wollen herausfinden, ob in einer kommenden Volksabstimmung die Deutschschweiz anders abstimmen wird als die französischsprachige Schweiz. Dazu machen Sie eine Umfrage. In der Deutschschweiz geben von 83 Personen 23 an, dass sie in einer kommenden Volksabstimmung mit JA stimmen wollen, die anderen NEIN. In der französischsprachigen Schweiz sind von 57 Befragten 19 dafür und der Rest dagegen. Testen Sie auf dem 5% - Niveau sowohl mit dem χ^2 -Test auf Unabhängigkeit, wie auch mit dem 2-Stichproben-Proportionentest, ob es einen signifikanten Unterschied bei den Zustimmungsraten gibt.

Lösung:

$$\begin{aligned} & 0.509 < 3.841 \rightarrow \mathcal{H}_0 \text{ beibehalten.} \\ & 0.708 < 1.96 \rightarrow \mathcal{H}_0 \text{ beibehalten.} \end{aligned}$$

Rep-FS18 - Aufgabe 5:

Sie haben Messwerte $x_1, \dots, x_9$, von denen wir ausgehen, dass sie aus einer normalverteilten Grundgesamtheit stammen. Leider sind weder Mittelwert noch Varianz bekannt. Machen Sie einen t -Test, um herauszufinden, ob der Mittelwert 2 ist oder nicht. Dabei stehen Ihnen folgende Angaben zur Verfügung.: $\bar{x} = 2.6$, $\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 = 4.2$.

- Testen Sie einseitig auf dem 5 %-Niveau, ob $\mathcal{H}_0 : \mu \leq 2$ vs $\mathcal{H}_1 : \mu > 2$?
- Berechnen Sie das 99% Konfidenzintervall für μ .

Lösung:a) $2.484 > 1.86 \rightarrow \mathcal{H}_1$ annehmen b) $[1.79, 3.41]$ **Rep-FS18 - Aufgabe 6:**

Sie machen in R den unteren Test. Geben Sie genau an:

- Welcher Test wurde gemacht (genauer Name und Hypothesen)?
- Berechnen Sie d.
- Machen Sie eine Skizze und tragen Sie dort die unten angegebene Zahl 0.1313 als Fläche ein.

Tragen Sie dazu auf der x-Achse auch die kritischen Werte und den Wert der Teststatistik ein, falls $\alpha = 0.05$.

- Wie ist unten der P-Wert für den einseitigen Test $\mathcal{H}_0 : \mu \leq 2$ vs $\mathcal{H}_1 : \mu > 2$?
- Wie ist das 99% Konfidenzintervall für den Mittelwert? Benutzen Sie $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 4.52$.
- Unten finden Sie $df = 4$. Erklären Sie diese Zahl?

```
> a<-c(2.2, 3.8, 4.2, 1.7, d)
> t.test(a, mu=2)
One Sample t-test
data: a
t = 1.8932, df = 4, p-value = 0.1313
alternative hypothesis: true mean is not equal to 2
95 percent confidence interval:
1.580093 4.219907
sample estimates:
mean of x
2.9
```

Lösung:

a) 1-Stichproben t -Test, $\mathcal{H}_0 : \mu = 2$, $\mathcal{H}_1 : \mu \neq 2$ b) $d = 2.6$
 c) siehe ML d) 0.06565 e) $[0.711, 5.089]$ f) $df = 5 - 1 = n - 1$

Rep-FS18 - Aufgabe 7:

Sie versuchen herauszufinden, ob ein Würfel fair ist oder nicht. Dazu werfen Sie ihn 60 mal und zählen die Häufigkeiten der verschiedenen Augenzahlen. Sie erhalten: 9mal die 1; 13 mal die 2; 10 mal die 3; 7 mal die 4; 16 mal die 5; 5 mal die 6. Testen Sie mit Hilfe des χ^2 -Anpassungstests auf dem 5% - Niveau, ob der Würfel fair ist oder nicht.

Lösung: $7.9 < 11.1 \rightarrow \mathcal{H}_0$ behalten**FS18 - Aufgabe 6:**

Sie machen in R den unteren Test. Geben Sie genau an

- a) Welcher Test wurde gemacht (genauer Name und Hypothesen)?
- b) Berechnen Sie d .
- c) Wie ist unten der P-Wert für den einseitigen Test $\mathcal{H}_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ vs $\mathcal{H}_1 : \mu_1 > \mu_2$?
- d) Wie ist das 99 % Konfidenzintervall für die Differenz der Mittelwerte?
- e) Braucht es die gleiche Stichprobengröße in a und b?
- f) Unten finden Sie **df=6**. Erklären Sie diese Zahl?
- g) Woran erkennen Sie, ob in R die Teststatistik im Zähler $\text{mean}(a) - \text{mean}(b)$ oder $\text{mean}(b) - \text{mean}(a)$ rechnet?

```
> a <- c(2.3, 2.2, 3.2, d)
> b <- c(1.8, 2.2, 2.6, 2.9)
> t.test(a, b, var.equal = TRUE)
.....
data: a and b
t = 1.077, df = 6, p-value = 0.3229 alternative hypothesis: true difference in means
is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.5723973 1.4723973
sample estimates:
mean of x mean of y
2.825 2.375
```

Lösung:

- a) 2-Stichpr. t -Test, $\mathcal{H}_0 : \mu_1 = \mu_2$, $\mathcal{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ b) $d = 3.6$
- c) 16.145% d) $[-1.0989, 1.9989]$ e) Nein f) $4 + 4 - 2 = 6$
- g) $t = 1.077 > 0 \Rightarrow \text{mean}(a) - \text{mean}(b)$, da > 0 !

FS18 - Aufgabe 7:

Sie interessieren sich dafür, ob bei einer bestimmten Krankheit ein Zusammenhang mit dem Geschlecht besteht. Sie haben 100 Frauen und 200 Männer zufällig ausgewählt. Bei den Männern haben 22 die Krankheit und bei den Frauen 14.

- a) Testen Sie mit dem χ^2 -Test auf dem 5%-Niveau, ob Geschlecht und Vorhandensein der Krankheit unabhängig sind oder nicht.
- b) Testen Sie zweiseitig mit dem Proportionen-Test auf dem 5%-Niveau, ob die Häufigkeiten der Krankheit bei Männern und Frauen gleich sind.

Lösung:

a) $\mathcal{H}_0$: unabhängig, $\mathcal{H}_1$: abhängig, $u = 0.56817 < 3.841 \rightarrow \mathcal{H}_0$ beibehalten.

b) $\mathcal{H}_0$: $p_1 = p_2$, $\mathcal{H}_1$: $p_1 \neq p_2$, Teststat. $\approx 0.729 < 1.96 \rightarrow \mathcal{H}_0$ beibehalten.

Rep-FS17 - Aufgabe 5:

Sie wägen das Gewicht von vier Paketen, welche im Durchschnitt 500 Gramm schwer sein sollten. Die Gewichte sind in Gramm im Einzelnen 493, 494, 507, 519. Gehen Sie im folgenden davon aus, dass die Gewichte normalverteilt modelliert werden können.

- a) Testen Sie zweiseitig auf dem 5 %-Niveau, ob das Durchschnittsgewicht 500 Gramm ist oder nicht.
- b) Geben Sie noch das 90 %-Konfidenzintervall an.

Lösung:

a) $\mathcal{H}_0$: $\mu = 500$, $\mathcal{H}_1$: $\mu \neq 500$ $|0.529| < 3.182 = CV \Rightarrow \mathcal{H}_0$ behalten b) $[488.8, 517.7]$

Rep-FS17 - Aufgabe 7:

- a) Sie befragen 40 (zufällig ausgewählte) Frauen und Männer, ob sie rauchen oder nicht und erhalten das Ergebnis:
Frauen: 20 Raucher, 20 Nichtraucher; Männer: 16 Raucher, 24 Nichtraucher.
Machen Sie einen χ^2 -Test auf Unabhängigkeit auf dem 5 %-Niveau, um herauszufinden, ob Geschlecht und Rauchgewohnheiten unabhängig sind oder nicht.
- b) Sie befragen 4000 (zufällig ausgewählte) Frauen und Männer, ob sie rauchen oder nicht und erhalten das Ergebnis:
Frauen: 2000 Raucher, 2000 Nichtraucher; Männer: 1600 Raucher, 2400 Nichtraucher.
Machen Sie einen χ^2 -Test auf Unabhängigkeit auf dem 5 %-Niveau, um herauszufinden, ob Geschlecht und Rauchgewohnheiten unabhängig sind oder nicht.
- c) Sie befragen 2000 (zufällig ausgewählte) Frauen und Männer, ob sie rauchen oder nicht und erhalten das Ergebnis:
Frauen: 952 Raucher, 1048 Nichtraucher; Männer: 1015 Raucher, 985 Nichtraucher.
Machen Sie einen χ^2 -Test auf Unabhängigkeit auf dem 5 %-Niveau, um herauszufinden, ob Geschlecht und Rauchgewohnheiten unabhängig sind oder nicht. Folgender R Code kann benützt werden.
- ```
> M <- as.table(rbind(c(952,1048),c(1015,985)))
> chisq.test(M, correct=FALSE)
Pearson's Chi-squared test
data: M
X-squared = 3.9701, df = 1, p-value = 0.04632
```
- d) Darf man bei einem  $\chi^2$ -Test auf Unabhängigkeit mit den Prozentzahlen arbeiten oder muss man immer die absoluten Werte nehmen? Kurze, klare Antwort ohne Begründung reicht.

### Lösung:

- a)  $\mathcal{H}_0$  : Unabhängig  $\mathcal{H}_1$  : abhängig  $\alpha = 0.05$   $u = 0.808\overline{0} < 3.841 = CV \rightarrow \mathcal{H}_0$  behalten  
b)  $u = 80.8\overline{0} > 3.841 = CV \rightarrow \mathcal{H}_1$  annehmen  
c)  $u = 3.9701 > 3.841 = CV \rightarrow \mathcal{H}_1$  annehmen d) immer absolute Werte nehmen!

**FS17 - Aufgabe 6:**

Sie machen in R den unteren Test. Geben Sie genau an:

- welcher Test wurde gemacht (genauer Name und Hypothesen)?
- Berechnen Sie  $b$ .
- Wie kann man aus unteren Angaben den geschätzten Standardfehler berechnen, ohne die 6 Zahlen direkt nochmals zu benutzen? Berechnen Sie so den geschätzten Standardfehler.
- Angenommen, Sie wollen testen, ob  $\mu = 2$  oder nicht (zweiseitig). Welchen Wert nimmt dann die Teststatistik an?
- Wie ist unten der P-Wert für den einseitigen Test  $\mathcal{H}_0 : \mu \leq 0$  vs  $\mathcal{H}_1 : \mu > 0$ ?

```
> a<-c(-2.2, -0.7, 3, 1.5, 0.2, b)
> t.test(a)
```

One Sample t-test

```
data: a
t = 0.93891, df = 5, p-value = 0.3909
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -1.390281 2.990281
sample estimates:
mean of x
 0.8
```

**Lösung:**

a) 1-Stichproben  $t$ -Test,  $\mathcal{H}_0 : \mu = 0$ ,  $\mathcal{H}_1 : \mu \neq 0$    b)  $b = 3$   
c)  $(0.8 - 0)/0.93891 \approx 0.852$    d)  $(0.8 - 2)/0.852 \approx -1.4$    e)  $0.3909/2 = 0.19545$

**FS17 - Aufgabe 7:**

Sie interessieren sich dafür, ob bei einer bestimmten Krankheit ein Zusammenhang mit dem Geschlecht besteht. Sie haben 400 Frauen und 400 Männer zufällig ausgewählt. Bei den Männern haben 160 die Krankheit und bei den Frauen 134.

- Testen Sie mit einem  $\chi^2$ -Test auf dem 5 % Niveau, ob Geschlecht und Vorhandensein der Krankheit unabhängig sind oder nicht.
- Braucht es für diesen Test die gleiche Anzahl Frauen und Männer (Ja / Nein)?

**Lösung:**

a)  $\mathcal{H}_0$ : unabhängig,  $\mathcal{H}_1$ : abhängig,  $\alpha = 0.05$     $u = 3.64 < 3.841 = CV \rightarrow \mathcal{H}_0$  behalten.   b) Nein

**Rep-FS16 - Aufgabe 5:**

Bäckermeister Schlufi macht Verlust. Er möchte jetzt ein bisschen schummeln und stellt die Bäckerei so ein, dass Brote von offiziell deklarierten 200 Gramm in der Tat im Durchschnitt 195 Gramm schwer sind. Eine Verbraucherschutzorganisation schöpft Verdacht. Es werden 5 Brote herausgenommen und gewogen. Die Gewichte sind in Gramm 193, 194, 196, 199, 201.

- a) Wie wird die Verbraucherschutzorganisation sinnvollerweise die Hypothesen wählen (mit Begründung)?
- b) Testen Sie die Hypothese aus a) auf dem 5 %-Niveau mit einem t-Test.
- c) Geben Sie noch das 90 %-Konfidenzintervall an.

**Lösung:** a)  $\mathcal{H}_0 : \mu = 200, \mathcal{H}_1 : \mu < 200$  b)  $-2.2616 < -2.1318 = CV \Rightarrow \mathcal{H}_1$  annehmen c) [193.4, 199.8]

**Rep-FS16 - Aufgabe 6:**

In einem Staat gibt es 4 Gliedstaaten, wir nennen sie (Bevölkerungsanteile in % an der Gesamtpopulation in Klammern) A (40), B (33), C (21) und D (6). Eine Wirtschaftszeitschrift möchte herausfinden, ob die Anteile der bestverdienenden Personen etwa den Bevölkerungsanteilen der Gliedstaaten entsprechen. Unter den 50 bestverdienenden Personen sind 17 aus A, 14 aus B, 11 aus C und 8 aus D. Testen Sie auf dem 5 %-Niveau, ob die Anteile der bestverdienenden Personen den Bevölkerungsanteilen der Gliedstaaten entsprechen oder ob es eine signifikante Abweichung gibt.

**Lösung:**  $\mathcal{H}_0 : p_A = 0.4, p_B = 0.33, p_C = 0.21, p_D = 0.06$   $\mathcal{H}_1$  : mind. 1 W'keit versch.  
 $\alpha = 0.05 \quad \chi\text{-Wert} = 9.185 > 7.815 = \chi_{5\%, df=3} \rightarrow \mathcal{H}_1$  annehmen

### FS16 - Aufgabe 6:

Sie machen in R den unteren Test. Geben Sie genau an

- a) welcher Test gemacht wurde (genauer Name und Hypothesen)?
- b) Wie entscheiden Sie bei einem  $\alpha$  von 5%?
- c) wie gross darf  $\alpha$  maximal sein, damit Sie die  $\mathcal{H}_0$ -Hypothese gerade noch annehmen (Grenze selber angeben - egal, ob diese selber dazugehört oder nicht)
- d) Es steht  $df=13$ . Wie ist diese Zahl entstanden (Antwort im Sinne von  $m + n - k = 13$ )?
- e) Was hat es mit dem Befehl "var.equal=TRUE" auf sich?

```
> a
```

```
[1] -1.436060 7.011804 -1.342872 5.278482 9.343288 3.484217 7.703757
```

```
> b
```

```
[1] 5.6604893 0.2519556 3.8035814 10.9066280 3.6867929 2.6699228 11.6068700 0.8105229
```

```
> t.test(a,b, var.equal=TRUE)
```

Two Sample t-test

data: a and b

t = -0.28554, df = 13, p-value = 0.7797

alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0

95 percent confidence interval:

-5.420382 4.154796

sample estimates:

mean of x mean of y

4.291802 4.924595

**Lösung:**

- a) 2-Stichproben  $t$ -Test mit  $\mathcal{H}_0 : \mu_1 = \mu_2$ ,  $\mathcal{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$    b)  $\mathcal{H}_0$  beibehalten  
c)  $\alpha = 77.97\%$    d)  $15 - 2 = 13$    e) Voraussetzung  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  ist erfüllt

### Rep-FS15 - Aufgabe 6:

In der Zeitung lesen Sie, dass das durchschnittliche Monatseinkommen von StudentInnen auf dem Platz Zürich bei 630 CHF liegt. Sie glauben, der Wert sollte höher sein - das kann so nicht stimmen. Um das zu testen, fragen Sie jetzt Ihre 5 KollegInnen, wie viel sie verdienen. Es sind dies 612, 280, 723, 1320, 960. Gehen Sie davon aus, dass die Verteilung der Einkommen von Personen normalverteilt modelliert werden kann.

- a) Testen Sie mit sinnvoller Hypothesenwahl auf dem 5 %-Niveau, ob die Angaben in der Zeitung stimmen oder nicht.
- b) Berechnen Sie auch ein 90 %-Konfidenzintervall für das Einkommen unter Ihren KollegInnen.

**Lösung:**

- a)  $0.8564 < 2.132 \Rightarrow H_0$  behalten   b) [408.1, 1149.9]

**FS15 - Aufgabe 5:**

Ein Hersteller einer Backmaschine kann seinen Backautomat laut Werbeprospekt sehr genau einstellen und die Brötchen wiegen auch ziemlich gleich viel. Bevor eine Grossbäckerei einen Grossauftrag erteilt, will sie dies gut testen. Diese Grossbäckerei möchte weder zu schwere Brote, noch zu leichte. Sie testet zum Niveau 5 %, stellt die Maschine auf 200 Gramm ein und nimmt 6 Brote heraus. Diese wiegen 198, 197, 202, 200, 204, 195 Gramm. Gehen Sie davon aus, dass die Daten aus einer Normalverteilung stammen.

- 1.) Wählen Sie sinnvolle Hypothesen und testen Sie.
- 2.) Geben Sie ein 90 %-Konfidenzintervall für den Durchschnitt an.
- 3.) Wir wollen ein 90 %-Konfidenzintervall für den Durchschnitt haben, dessen Länge kleiner als 1 Gramm ist.

Wie gross muss  $n$  mindestens sein? Benutzen Sie dazu eine bekannte Überschlagsrechnung aus der Vorlesung (Achtung: anderes  $\alpha$ ), wobei Sie - abgesehen von  $n$  - obige Zahlen benutzen.

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
 1.) \quad \mathcal{H}_0 : \mu &= 200, \quad \mathcal{H}_1 : \mu \neq 200, \quad \alpha = 0.05 \quad \frac{\bar{x} - 200}{s/\sqrt{n}} = -0.4909 \\
 CV &= t_{5,0.05} = 2.571 \quad | -0.4909 | < 2.571 \rightarrow \mathcal{H}_0 \text{ beibehalten.} \\
 2.) \quad CV &= t_{5,0.10} = 2.015, \quad KI: [196.6, 202.1] \quad 3.) \quad n > (2 \cdot 1.64 \cdot s/1)^2 \rightarrow n = 120
 \end{aligned}$$

**FS15 - Aufgabe 6:**

Ein Würfel wird untersucht, ob er fair ist oder nicht. Dazu wird er 600 mal geworfen. Es gibt 113 mal eine 1, 95 mal eine 2, 124 mal eine 3, 107 mal eine 4, 89 mal eine 5 und der Rest waren 6er.

- 1.) Testen Sie auf dem 5 %-Niveau mit dem  $\chi^2$ -Anpassungstest, ob der Würfel fair ist oder nicht.
- 2.) Jetzt betrachten Sie nur noch die 4er. Es gab ja 107 mal eine 4. Testen Sie jetzt noch mit dem Test auf Proportionen zum Niveau 5 %, ob die Proportion der 4er signifikant zu hoch ist oder nicht.

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
 1.) \quad \mathcal{H}_0 : p_i &= 1/6 \forall i, \quad \mathcal{H}_1 : \text{es gibt } i \neq j \text{ mit } p_i \neq p_j, \quad \sum \frac{(s_i - 600 \cdot 1/6)^2}{600 \cdot 1/6} = 17.24 \\
 CV &= \chi_5^2 = 11.07 \quad 17.24 > 11.07 \rightarrow \mathcal{H}_1 \text{ annehmen.} \\
 2.) \quad \mathcal{H}_0 : p_4 &= 1/6, \quad \mathcal{H}_1 : p_4 > 1/6, \quad \alpha = 0.05 \quad \frac{107/600 - 1/6}{\sqrt{1/6 \cdot 5/6 \cdot 1/600}} \approx 0.7668 \\
 CV &= z_{0.95} = t_{\infty,0.05} = 1.64 \quad 0.7668 < 1.64 \rightarrow \mathcal{H}_0 \text{ beibehalten.}
 \end{aligned}$$

**Rep-FS14 - Aufgabe 5:**

Testen Sie auf dem 5 %-Niveau mit Hilfe eines  $\chi^2$ -Anpassungstests, ob ein gegebener Würfel fair ist. Dazu haben Sie in 100 Würfeln folgende absoluten Häufigkeiten: die Eins erscheint 22 mal, die Zwei erscheint 21 mal, die Drei erscheint 12 mal, die Vier erscheint 14 mal, die Fünf 17 mal, die Sechs erscheint 14 mal.

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_0 : p_i &= 1/6 \forall i \quad \mathcal{H}_1 : p_i \neq p_j \text{ für mind. ein } i \text{ und } j. \\
 \chi\text{-Wert} &= 4.99 < 11.07 = \chi_{5\%, df=5} \rightarrow \mathcal{H}_0 \text{ beibehalten}
 \end{aligned}$$

**Rep-FS14 - Aufgabe 6:**

Testen Sie zwei Brandbeschleuniger gegeneinander; Ziel ist ein tiefer Wert.

In Tests erhalten Sie mit Beschleuniger A die folgenden vier Zeiten bis das Zielobjekt brennt: 3.3, 2.7, 4.8, 2.9 und mit Brandbeschleuniger B die 3 Werte 2.5, 3.1, 3.2.

- Testen Sie auf dem 10 %-Niveau, ob sich die beiden Mittelwerte signifikant voneinander unterscheiden oder nicht. (2-Stichproben-T-Test)
- Welchen Wert bekommt die Teststatistik, wenn sie anstelle eines 2-Stichproben-T-Tests in a) eine Varianzanalyse machen?
- Machen Sie ein 95 %-Konfidenzintervall für die Differenz der beiden Mittelwerte.

**Lösung:**

- a)  $\mathcal{H}_0 : \mu_1 = \mu_2$     $\mathcal{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$    t-Wert = 0.8319 < 2.015  $\rightarrow \mathcal{H}_0$  beibehalten  
 b)  $t^2 = 0.8139^2 = 0.6921 = v$    c) [-1.03, 2.01] oder [-2.01, 1.03]

**FS14 - Aufgabe 5:**

In einer statistischen Untersuchung mit  $n = 5$  Zahlen stehen Ihnen nachfolgende Ausdrücke zur Verfügung. Gehen Sie davon aus, dass die Daten aus einer Normalverteilung stammen. Die Notation kommt aus Storrer und Vorlesung und wir sagen nicht, dass/ob Sie alle Ausdrücke benötigen.  $S_{xx} = 2$ ,  $\bar{x} = 2$ .

- Testen Sie zweiseitig auf dem 10 %-Niveau, ob der Mittelwert 2.5 ist oder nicht.
- Geben Sie ein 95 %-Konfidenzintervall für den Durchschnitt an.
- Wir wollen ein 95 %-Konfidenzintervall für den Durchschnitt haben, dessen Länge kleiner als 0.1 ist.

Wie gross muss  $n$  mindestens sein? Benutzen Sie dazu eine bekannte Überschlagsrechnung aus der Vorlesung, wobei Sie - abgesehen von  $n$  - obige Zahlen benutzen.

**Lösung:**

- 1.)  $\mathcal{H}_0 : \mu = 2.5, \mathcal{H}_1 : \mu \neq 2.5$     $|-1.58| < 2.132 \rightarrow \mathcal{H}_0$  annehmen.  
 2.) [1.122, 2.878]   3.)  $n \geq \left(\frac{4s}{l}\right)^2 = 800$

**FS14 - Aufgabe 6:**

Es wird untersucht, ob die Westschweizer eher für den EU-Beitritt der Schweiz sind als die Deutschschweizer. Dazu befragt man 53 Deutschschweizer, von denen sind 12 für den EU-Beitritt. In der Westschweiz befragt man 44 Personen, von denen sich 15 für den Beitritt aussprechen.

- Berechnen Sie ein 95 %-Konfidenzintervall für die Differenz der Proportionen.
- Testen Sie auf dem 5 %-Niveau einseitig *mit Hilfe des Tests von Proportionen*, ob die Proportionen in den beiden Landesteilen eigentlich gleich sind und die Unterschiede rein zufällig sind oder ob die Westschweizer eher zu einem EU-Beitritt neigen. Verwenden Sie hier nicht den  $\chi^2$ -Test auf Unabhängigkeit!
- Testen Sie jetzt noch mit dem  $\chi^2$ -Test auf Unabhängigkeit auf dem 5 %-Niveau, ob die Frage des EU-Beitritts unabhängig von den Landesteilen ist oder nicht (das ist dann übrigens zweiseitig).

**Lösung:**

- 1.) [-0.298, 0.069] oder [-0.069, 0.298]  
 2.)  $\mathcal{H}_0 : p_1 - p_2 = 0$ ,    $\mathcal{H}_1 : p_1 - p_2 < 0$ ,    $-1.248 > -1.64 \rightarrow \mathcal{H}_0$  behalten.  
 3.)  $\mathcal{H}_0$ : unabhängig,  $\mathcal{H}_1$ : abhängig,    $1.57 < 2.841 \rightarrow \mathcal{H}_0$  behalten.

**Rep-FS13 - Aufgabe 5:**

Ein Würfel wird 100 mal geworfen und die Häufigkeit der Augenzahl notiert. Man bekommt 17 mal eine 1, 19 mal eine 2, 23 mal eine 3, 11 mal eine 4, 10 mal eine 5 und 20 mal eine 6. Testen Sie mit einem  $\chi^2$ -Anpassungstest auf dem 5 %-Niveau, ob der Würfel fair ist oder nicht.

**Lösung:**

$\mathcal{H}_0 : p_1 = \dots = p_6 = 1/6$  resp. "Würfel ist fair",  $\mathcal{H}_1 :$  "Würfel ist nicht fair"  
 $\chi^2\text{-Wert} = 8 < 11.07 = \chi^2_{df=5,0.05} \rightarrow \mathcal{H}_0$  annehmen

**FS13 - Aufgabe 7:**

Von 43 befragten Frauen gaben 14 an, dass sie rauchen; von 66 befragten Männern gaben 28 an, dass sie rauchen. Testen Sie auf dem Niveau 5 %-Niveau mit einem  $\chi^2$ -Test auf Unabhängigkeit (und nur mit diesem!), ob die Anteile sich unterscheiden oder nicht.

**Lösung:**

$\mathcal{H}_0 : p_{ij} = p_i \cdot p_j \ \forall i, j$  (Merkmale unabhängig)  $\mathcal{H}_1 :$  Merkmale nicht unabh.,  $\alpha = 0.05$   
 $u = 1.069 < 3.841 = \chi^2_{df=1,0.05} \rightarrow \mathcal{H}_0$  beibehalten

**Rep-FS13 - Aufgabe 6:**

Sie testen zwei Dünger gegeneinander; Ziel ist ein hoher Ertrag. Auf Testfeldern erhalten Sie mit Dünger A die folgenden fünf Erträge 20.3, 19.7, 22.8, 21.7, 19.9 und mit Dünger B die folgenden 4 Erträge 19.4, 19.5, 19.5, 21.3.

- a) Testen Sie auf dem 5 %-Niveau, ob sich die beiden Mittelwerte signifikant voneinander unterscheiden oder nicht. (2-Stichproben-T-Test)
- b) Welchen Wert bekommt die Teststatistik, wenn sie anstelle eines 2-Stichproben-T-Tests in a) eine Varianzanalyse machen?
- c) Machen Sie ein 90 %-Konfidenzintervall für die Differenz der beiden Mittelwerte.

**Lösung:**

a)  $\mathcal{H}_0 : \mu_1 = \mu_2$   $\mathcal{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$  t-Wert = 1.217 < 2.365  $\rightarrow \mathcal{H}_0$  beibehalten  
b)  $v = t^2 = 1.481$  c)  $[-0.532, 2.442]$

**FS13 - Aufgabe 6:**

Die 1 : 12-Initiative will im gleichen Unternehmen das Verhältnis des kleinsten zum grössten Lohn auf 12 limitieren. In einer Umfrage in der Deutschschweiz gaben von 76 Personen 23 an, die Initiative zu unterstützen, die anderen waren dagegen.

1. Berechnen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den Anteil der Zustimmenden in der Deutschschweiz  $p_1$ .
2. Testen Sie zweiseitig auf dem 10% - Niveau die Hypothese, dass der Anteil 50 % ist. ( $\mathcal{H}_0$ ).

In der französisch-sprachigen Schweiz sprachen sich von 54 Personen deren 21 für die Initiative aus.

1. Berechnen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für die Differenz der Anteile der Zustimmenden in der Deutschschweiz und der französisch-sprachigen Schweiz  $p_1 - p_2$ .
2. Testen Sie zweiseitig auf dem 10% - Niveau die Hypothese, dass die Anteile in den beiden Landesteilen verschieden sind.

**Lösung:**

[0.1993, 0.4059]       $\mathcal{H}_0 : p_1 = 0.5, \quad \mathcal{H}_1 : p_1 \neq 0.5$        $-3.44 < -1.64 \rightarrow \mathcal{H}_1$  annehmen  
 [-0.2523, 0.0798]       $\mathcal{H}_0 : p_1 - p_2 = 0, \quad \mathcal{H}_1 : p_1 - p_2 \neq 0$        $-1.018 > -1.64 \rightarrow \mathcal{H}_0$  annehmen

**Rep-FS12 - Aufgabe 5:**

- a) Ein renommiertes Meinungsforschungsinstitut kommt 3 Wochen vor der Abstimmung zur "Initiative gegen Passivrauchen" zum Schluss, dass 60 % für die Initiative stimmen werden. Sie glauben, dass diese Zustimmung zu hoch ist, es sollten Ihrer Meinung nach weniger sein. Sie befragen hierzu 40 Personen. Wie sieht ein einseitiger Test auf dem 5 % Niveau aus? Es werden dann in Ihrer Mini-Umfrage von den 40 Personen 22 für die Initiative sein. Stützt dies die Schlussfolgerung des Meinungsforschungsinstitut (unter Benutzung des soeben entwickelten Tests)?
- b) Bei ebendieser Initiative glauben Sie, dass in der Westschweiz die Zustimmung signifikant höher ist als in der Deutschschweiz. In einer Untersuchung befragen Sie 42 Westschweizer; hiervon sind 28 für die Initiative; von 52 Deutschschweizern sind 30 Personen dafür. Wie sieht ein einseitiger Test auf dem 10 %-Niveau aus? Deutet Ihr Test auf eine grössere Zustimmung in der Westschweiz hin? Untersuchen Sie diese Frage *nicht* mit dem  $\chi^2$ -Test auf Unabhängigkeit!

**Lösung:**

- 1.)  $\mathcal{H}_0 : p = 0.6, \quad \mathcal{H}_1 : p < 0.6$        $-0.646 > -1.645 \rightarrow \mathcal{H}_0$  behalten.
- 2.)  $\mathcal{H}_0 : p_1 = p_2, \quad \mathcal{H}_1 : p_1 > p_2$        $0.898 < 1.28 \rightarrow \mathcal{H}_0$  behalten.

**FS12 - Aufgabe 5:**

- a) Sie haben als KonsumentenschützerIn die Vermutung, dass ein Bäcker systematisch zu leichte Brote backt. Sie machen einen Test und nehmen vier Brote mit Anschrift 500 g und erhalten folgende Messungen, jeweils in Gramm: 503, 498, 492, 499. Sie nehmen an, dass sie das Gewicht der Brote mit einer Normalverteilung modellieren können. Wie wird Ihr Test auf dem 5%-Niveau aussehen (in der Planung) und was liefert er dann mit diesen obigen Daten für eine Empfehlung?
- b) Geben Sie auch ein Konfidenzintervall für das Gewicht zum Niveau 90% an.

**Lösung:**

$$\text{a) } \mathcal{H}_0 : \mu = 500, \mathcal{H}_1 : \mu < 500, \alpha = 0.05 \quad t = \frac{\bar{x} - 500}{s/\sqrt{n}} = -0.8799, \\ CV = t_{3,0.05} = 2.353, \quad |-0.8799| < 2.353 \Rightarrow \mathcal{H}_0 \text{ beibehalten} \quad \text{b) } [492.7, 503.3]$$

**FS12 - Aufgabe 6:**

In einer Strassenumfrage in Portugal unter 43 Personen haben 23 Personen angegeben, dass sie glauben, dass am 31.12.2012 die Gemeinschaftswährung "Euro" mit all den heutigen Mitgliedsstaaten bestehen wird; in einer analogen Strassenumfrage in Griechenland haben bei 38 Personen lediglich 17 angegeben, dass sie glauben, dass am 31.12.2012 die Gemeinschaftswährung "Euro" mit all den heutigen Mitgliedsstaaten bestehen wird. Testen Sie mit einem  $\alpha$  von 0.05, ob es einen signifikanten Unterschied in der Beurteilung der Zukunft zwischen Griechen und Portugiesen gibt.

**Lösung:**

$$\mathcal{H}_0 : p_2 - p_1 = 0, \mathcal{H}_1 : p_2 - p_1 \neq 0, \alpha = 0.05 \quad \text{Teststatistik} = 0.789, \\ CV = t_{\infty,0.05} = 1.96, \quad |0.789| < 1.96 \Rightarrow \mathcal{H}_0 \text{ beibehalten}$$

**Rep-FS11 - Aufgabe 5:**

- a) Sie produzieren Zündhölzer der durchschnittlichen Länge 3 Zentimeter. Sie wollen sicher sein, dass Sie durchschnittlich nicht zu lange Zündhölzer produzieren. Dazu nehmen Sie eine 5er Stichprobe zufällig aus der Produktion und messen diese ganz genau. Es ergeben sich folgende Werte: 3.02, 3.17, 3.02, 2.98, 2.94. Testen Sie auf dem 5 %-Niveau, ob die durchschnittliche Länge die Grenze 3 Zentimeter nicht überschreitet.
- b) Geben Sie auch ein Konfidenzintervall mit Konfidenzkoeffizient 90 % für die Länge der Zündhölzer an.

**Lösung:**

$$\text{a) } \mathcal{H}_0 : \mu = 3, \mathcal{H}_1 : \mu > 3 \alpha = 0.05 \quad t = \frac{\bar{x} - 3}{s/\sqrt{n}} = 0.134, \\ CV = t_{4,0.05} = 2.132, \quad 0.134 < 2.132 \Rightarrow \mathcal{H}_0 \text{ beibehalten} \quad \text{b) } [2.943, 3.109]$$

**FS11 - Aufgabe 5:**

- a) Die Maschine "Goldie" produziert Goldmünzen einer vorgegebenen Grösse mit gegebenem Goldgehalt. Sie wollen als Hersteller der Maschine anhand einer 4er Stichprobe testen, ob der Goldgehalt tatsächlich der vorgegebenen Grösse von 5 Gramm entspricht. Die 4er Stichprobe gibt die Werte 4.998, 4.982, 5.002, 5.028. Testen Sie auf dem 5%-Niveau, ob der Goldgehalt stimmt oder nicht, zweiseitig.
- b) Erklären Sie, weshalb in a) ein zweiseitiger Test angemessen ist. Wann (und für wen) macht ein einseitiger Test eher Sinn (2 Fälle)?
- c) Geben Sie auch ein Konfidenzintervall für den Goldgehalt zum Niveau 95% an.

**Lösung:**

a)  $\mathcal{H}_0 : \mu = 5, \mathcal{H}_1 : \mu \neq 5 \quad |\approx 0.209| < 3.182 \rightarrow \mathcal{H}_0$  beibehalten

b) Zweiseitig: Maschinen-Hersteller (Produkt ist genau); Käufer: einseitig  $\mathcal{H}_1 : \mu < 5$ ; Verkäufer: einseitig  $\mathcal{H}_1 : \mu > 5$  c) KI = [4.97, 5.03]

**FS11 - Aufgabe 6:**

Sie wollen herausfinden, ob die Deutschschweizer/innen und Romands sich bei der Frage des Rauchverbots in Restaurants unterscheiden. Dazu haben Sie 43 Deutschschweizer/innen befragt; 23 finden ein Rauchverbot in Restaurants eine gute Sache; bei den 37 befragten Romands fanden 31 ein Rauchverbot eine gute Sache. Testen Sie auf dem 5%-Niveau, ob diese Differenz der Proportionen signifikant von 0 verschieden ist.

**Lösung:**

$\mathcal{H}_0 : p_2 - p_1 = 0, \quad \mathcal{H}_1 : p_2 - p_1 \neq 0 \quad 3.12 > 1.96 \rightarrow \mathcal{H}_1$  annehmen

**FS10 - Aufgabe 5:**

Bei einer bestimmten Schneckenart wird der Durchmesser der Häuser von ausgewachsenen Schnecken gemessen. Man erhielt bei 6 Schnecken die folgenden Zahlen in Millimetern: 16, 17, 18, 15, 17, 16.

- a) Berechnen Sie ein KI zum Niveau 0.95 für den durchschnittlichen Durchmesser der Schneckenhäuser, wenn die Varianz unbekannt ist.
- b) Testen Sie bei unbekannter Varianz auf dem Niveau 0.1, ob der durchschnittliche Durchmesser signifikant von 17 verschieden ist oder nicht.

**Lösung:**

a) 515.4, 17.6] b)  $\mathcal{H}_0 : \mu = 17, \mathcal{H}_1 : \mu \neq 17, \quad |-1.167| < 2.015 \rightarrow \mathcal{H}_0$  behalten

**FS09 - Aufgabe 5:**

Harry Hirsch stellt in seiner Manufaktur Pfeile her. Diese sollten eine gewisse Länge haben. 41 Stück wurden bestellt. Das arithmetische Mittel betrug  $\bar{x} = 70.45$  cm und die Standardabweichung wurde auf

$$\sqrt{\frac{1}{40} \sum_{i=1}^{41} (x_i - \bar{x})^2} = 0.3 \text{ cm}$$

geschätzt.

- Berechnen Sie ein 95%-KI für die durchschnittliche Längen der Pfeile.
- Obige Serie sollte laut Bestellung eigentlich durchschnittlich 70 cm lang sein. Testen Sie auf dem 10%-Niveau, ob es eine signifikante Abweichung von den 70 cm gibt oder nicht.

**Lösung:**

a) 70.355, 70.545]    b)  $\mathcal{H}_0 : \mu = 70, \mathcal{H}_1 : \mu \neq 70$   
 $|9.604| > 1.684 \rightarrow \mathcal{H}_1$  annehmen

**FS08 - Aufgabe 5:**

Die Länge von 36 Nägeln wird gemessen. Das arithmetische Mittel war 2.03 cm und die empirische Standardabweichung berechnet sich mit

$$\sqrt{\frac{1}{35} \sum_{i=1}^{36} (x_i - \bar{x})^2} = 0.02 \text{ cm.}$$

Geben Sie ein 95 und ein 99 Prozent Konfidenzintervall für den Mittelwert an (Genauigkeit 3 Stellen nach dem Komma). Gehen Sie dabei davon aus, dass die Länge der Nägel mit einer Normalverteilung modelliert wird.

**Lösung:**

99%-KI: [2.021, 21.035],    95%-KI: [2.023, 2.037]

**FS08 - Aufgabe 6:**

318 runde, gelbe Erbsen, 102 runde, grüne Erbsen sowie 108 verschrumpfte, gelbe Erbsen und 26 verschrumpfte grüne Erbsen werden bei Kreuzungsversuchen gezählt. Aus theoretischen Gründen erwartet man ein Verhältnis (in obiger Reihenfolge) von

$$9 : 3 : 3 : 1.$$

Untersuchen Sie auf dem 1% und 5%-Niveau, ob die Zahlen aus dem Experiment mit dem theoretischen Modell vereinbar sind.

**Lösung:**

$\mathcal{H}_0 : p_1 = \frac{9}{16}, p_2 = \frac{3}{16}, p_3 = \frac{3}{16}, p_4 = \frac{1}{16}$   
 $2.47 < 7.815 (< 11.345) \rightarrow \mathcal{H}_0$  behalten

**FS08 - Aufgabe 7:**

Bei antiken Ausgrabungsstätten werden an 2 Orten Münzen gefunden. Man will herausfinden, ob die Münzen am selben Ort und in der gleichen Periode hergestellt wurden. Dazu misst man den Silbergehalt der Münzen - man will den durchschnittlichen Silbergehalt der Münzen an den beiden Orten vergleichen. Am einen Ort sind die Werte (in einer gewissen Einheit) 4.3, 4.6, 5.1, 4.0 und am anderen Ort 4.0, 4.3., 5.3, 4.6, 4.4. Gehen Sie davon aus, dass die Stichproben unabhängig voneinander sind und modellieren Sie den Silbergehalt mit einer Normalverteilung. Nehmen Sie als Signifikantsniveau 5%.

- a) Wie lauten die Hypothesen?
- b) Mit welchen beiden Methoden kann man diese Frage exakt gleichwertig lösen?
- c) Lösen sie obige Aufgabe mit einer der beiden Methoden aus b) - und bitte nur mit einer. (falls Sie die Aufgabe mit beiden Methoden lösen, gibt es nicht mehr Punkte. Wenn eine der beiden Lösungen falsch ist, zählt die falsche Lösung!)
- d) Welcher Voraussetzung, welche oben nicht erwähnt wurde, muss erfüllt sein?

Da Sie sinnvollerweise den Taschenrechner benutzen werden: geben sie bitte genau an, in welche Formel Sie welche Zahlen eingesetzt haben.

**Lösung:**

- a)  $\mathcal{H}_0 : \mu_1 = \mu_2, \mathcal{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
- b) ANOVA mit 2 Gruppen & 2-Stichproben-T-Test
- c)  $0.0039 < 5.59 \rightarrow \mathcal{H}_0$  behalten
- d)  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$

**FS07 - Aufgabe 6:**

In Stahlwerk "Edel" werden Stahlholzen einer durchschnittlichen Länge von 9.8 cm hergestellt. Sie wollen dies jetzt mit einer kleinen Serie von 5 Probeexemplaren testen; als Signifikanzniveau wählen Sie 0.05. Die Länge der 5 Bolzen sei 9.8, 10.5, 10.3, 10.4 und 10.3. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Längen Realisationen aus einer Normalverteilung sind.

- a) Testen Sie zweiseitig, ob die Hypothese einer durchschnittlichen Länge von 9.8 cm gehalten werden kann oder nicht, wobei Sie die Varianz/Standardabweichung der Daten nicht kennen.
- b) Angenommen, Sie wissen, dass die wahre Standardabweichung genau 0.27 ist. Testen Sie nochmals auf dem gleichen Niveau die gleichen Hypothesen.

**Lösung:**

- a)  $\mathcal{H}_0 : \mu = 9.8 \mathcal{H}_1 : \mu \neq 9.8$   
 $3.807 > 2.776 \rightarrow \mathcal{H}_1$  annehmen
- b) (CV  $\mathcal{N}(0, 1)$ )  $3.8096 > 1.96 \rightarrow \mathcal{H}_1$  annehmen

**FS07 - Aufgabe 8:**

Beim Roulette gibt es 18 rote und 18 schwarze Felder; dazu noch die 0. In 800 Versuchen kam 22 mal die "0", 335 mal "Schwarz" und der Rest "Rot". Testen Sie auf dem Niveau 0.05, ob diese Verteilung einem fairen Spiel entspringt oder nicht.

**Lösung:**

$$\mathcal{H}_0 : p_r = p_s = \frac{18}{37}, p_0 = \frac{1}{37} \\ 14.99 > 5.991 \rightarrow \mathcal{H}_1 \text{ annehmen}$$

**FS07 - Aufgabe 9:**

Sie wollen den Verkauf von Schokostengeln in Ihrer Ladenkette steigern. Eine Methode kann sein, die Schokostengel besser zu platzieren - zum Beispiel nahe bei der Kasse. Sie haben 2 Läden A und B, welche Sie als identisch einstufen. Bei Laden A verschieben Sie die Schokostengel nahe zur Kasse; von 344 Kunden/innen in Laden A kauften 88 mindestens einen Schokostengel. In Laden B liessen Sie alles beim alten und dort haben von 391 Kunden/innen 82 mindestens einen Schokostengel gekauft.

- Berechnen Sie ein 95% Konfidenzintervall für die Differenz der Anteile der Käufer/innen von Schokostengeln in beiden Läden.
- Machen Sie auf dem Niveau  $\alpha = 0.1$  einen (einseitigen) Test, ob sich der Anteil in A gegenüber der unveränderten Ladenausstattung B geändert hat.

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \text{a) } & [-0.107, 0.015] \text{ oder KI} = [-0.015, 0.107] \\ \text{b) } & \mathcal{H}_0 : p_1 - p_2 = 0, \mathcal{H}_1 : p_1 - p_2 > 0 \\ & 1.475 > 1.28 \rightarrow \mathcal{H}_1 \text{ annehmen} \end{aligned}$$

**FS06 - Aufgabe 6:**

Der Zentralverband Schweizerischer Apfelproduzenten ZSA will ein Konfidenzintervall für den Durchmesser einer bestimmten Apfelsorte berechnen. ZSA nimmt an, dass dieser Durchmesser am Besten mit einer Normalverteilung modelliert werden sollte. Anhand einer Stichprobe von  $n = 12$  berechnet der ZSA ein arithmetisches Mittel von  $\bar{x} = 8$  cm; die Standardabweichung wurde mit

$$\hat{\sigma} := \sqrt{\frac{1}{11} \sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})^2} = 0.8 \text{ cm}$$

geschätzt. Welches Resultat erhält der ZSA, wenn er ein 95% Konfidenzintervall korrekt berechnet?

**Lösung:**

$$[7.49, 8.51]$$

### FS06 - Aufgabe 7:

An der Universität Sankt Gallen gibt es zwei konkurrierende Firmen, welche zu gleichen (teuren) Konditionen Prüfungs-Vorbereitungskurse für StudentInnen anbieten. In der Firma A nehmen 234 Studis einen Kurs und in der Firma B 143 Studis. Von den 234 Studis, welche bei Firma A die Vorbereitung hatten, bestanden 199 die Prüfung. Von den 143 Studis, welche bei Firma B die Vorbereitung hatten, bestanden 127 die Prüfung. Offenbar ist der Anteil der Erfolgreichen bei Firma B grösser als bei Firma A.

- Berechnen Sie das 95% Konfidenzintervall für die Differenz der Anteile der Erfolgreichen an der Prüfung (eventuell müssen Sie das Konfidenzintervall an den Nullpunkt spiegeln, je nachdem wie Sie die Differenz bilden.)
- Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit Sie die Methode anwenden dürfen (sie waren alle 4 (2 und 2) erfüllt)?
- Firma B behauptet nun, Sie sei signifikant besser als Firma A. Testen Sie auf dem  $\alpha = 5\%$ -Niveau, ob diese Behauptung haltbar ist ( $\mathcal{H}_0 : p_A = p_B$  versus  $\mathcal{H}_1 : p_A \leq p_B$  - Vorsicht: einseitig!). Dabei sei  $p_A$  der (theoretische) Anteil der Erfolgreichen bei Firma A; analog  $p_B$ .

**Lösung:**

a) KI =  $[-0.1067, 0.0313]$     b)  $n_1 > 30, n_2 > 30, \hat{p}_1, \hat{p}_2 \in [0.1, 0.9]$

c)  $\mathcal{H}_0 : p_A - p_B = 0, \mathcal{H}_1 : p_A - p_B \leq 0$   
 $1.0706 < 1.64 \rightarrow \mathcal{H}_0$  beibehalten

### FS06 - Aufgabe 8:

Pharmakonzern "Life" hat ein neues Medikament "PressureDown" zur Blutdrucksenkung entwickelt. Lie will mit einem kleinen ersten Versuch die Wirksamkeit prüfen. In einer Kontrollgruppe (Placebo) von 6 Personen wurde der Blutdruck um folgende Einheiten **gesenkt** 4.3, 2.5, 3.5, 5.5, -2.2, 8.8. Bei den 8 Personen, welche "PressureDown" erhielten, war die **Senkung** folgendermassen 13.5, 4.3, 10.0, 12.0, 8.7, 3.9, 2.2, 9.6. Gehen Sie mal davon aus, dass wir die Blutdrucksenkungen mit einer Normalverteilung modellieren können und alle Messungen unabhängig voneinander sind. Setzen Sie zudem gleiche Varianzen voraus. Testen Sie jetzt mit  $\alpha = 0.05$ , ob die (theoretischen) Mittelwerte der Senkung bei beiden gleich sind (zweiseitig!) - und zwar

- mit einem 2-Stichproben-T-Test und
- mit einer Varianzanalyse.

Wir wollen dabei die verwendeten Formeln mit Erklärungen der darin vorkommenden Grössen und die kritischen Werte der Tabellen auf dem Lösungsblatt sauber sehen!

**Lösung:**

$\mathcal{H}_0 : \mu_1 = \mu_2, \mathcal{H}_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

a)  $| -2.0331 | < 2.179 \rightarrow \mathcal{H}_0$  behalten

b)  $4.133 = (-2.0331)^2 < 4.75 \rightarrow \mathcal{H}_0$  behalten