

Aufgabe 4: Zentraler Grenzwertsatz (CLT)

Rep-FS22 - Aufgabe 4:

Sei $(X_i)_{i=1}^{121}$ eine iid Folge von t_7 -Zufallsgrößen.

a) Schätzen Sie mit dem CLT die folgende Wahrscheinlichkeit ab:

$$P\left[\sum_{i=1}^{121} X_i \leq 8\right]$$

b) Weiter sei $(Y_j)_{j=1}^{81}$ eine iid Folge von $\text{Bin}(8, 0.5)$ -Zufallsgrößen, welche unabhängig von den X_i aus a) sind. Welche Verteilung hat dann approximativ

$$Z := \sum_{i=1}^{121} X_i + \sum_{j=1}^{81} Y_j \quad ?$$

Lösung:

a) $F(8/\sqrt{121 \cdot 7/5}) = 0.7306$

b) $\mathcal{N}(121 \cdot 0 + 81 \cdot 4, 81 \cdot 2 + 121 \cdot 7/5) = \mathcal{N}(324, 331.4)$

FS22 - Aufgabe 4B:

Sei $(X_i)_{i=1}^{121}$ eine iid Folge von $\exp(\lambda)$ -Zufallsgrößen. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit

$$P\left[\sum_{i=1}^{121} X_i \leq 121 \cdot \frac{1}{\lambda} + 3\right]$$

untersuchen. Beantworten Sie dazu folgende Fragen.

a) Formen Sie mit Hilfe des CLT $P[\sum_{i=1}^{121} X_i \leq 121 \cdot \frac{1}{\lambda} + 3]$ so weit um, dass Sie danach in Teilaufgabe b) nur noch den Wert in der Normalverteilungstabelle ablesen müssen.

b) Welchen Wert erhalten Sie in Teilaufgabe a), wenn $\lambda = 4$.

Lösung:

a) $\approx P(\mathcal{N}(0, 1) \leq \frac{3}{\sqrt{121 \cdot \frac{1}{\lambda}}}) = F(\frac{3}{\sqrt{121 \cdot \frac{1}{\lambda}}}) = \Phi(\frac{3\lambda}{11})$

b) $F(\frac{12}{11}) = 0.8623$

FS22 - Aufgabe 4A:

Sei $(X_i)_{i=1}^{144}$ eine iid Folge von $\exp(\lambda)$ -Zufallsgrößen. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit

$$P\left[\sum_{i=1}^{144} X_i \leq 144 \cdot \frac{1}{\lambda} + 5\right]$$

untersuchen. Beantworten Sie dazu folgende Fragen.

a) Formen Sie mit Hilfe des CLT $P[\sum_{i=1}^{144} X_i \leq 144 \cdot \frac{1}{\lambda} + 5]$ so weit um, dass Sie danach in Teilaufgabe b) nur noch den Wert in der Normalverteilungstabelle ablesen müssen.

b) Welchen Wert erhalten Sie in Teilaufgabe a), wenn $\lambda = 2$.

Lösung:

a) $\approx P(\mathcal{N}(0, 1) \leq \frac{5}{\sqrt{144 \cdot \frac{1}{\lambda}}}) = F(\frac{5}{\sqrt{144 \cdot \frac{1}{\lambda}}}) = \Phi(\frac{5\lambda}{12})$

b) $F(\frac{5}{6}) = 0.7977$

Rep-FS21 - Aufgabe 4:

Sei $(X_i)_{i=1}^{81}$ eine iid Folge von χ_n^2 -Zufallsgrössen (es sind 81 Zufallsgrössen, n ist hier der Freiheitsgrad). Wir wollen die Wahrscheinlichkeit

$$P\left[\sum_{i=1}^{81} X_i \leq 81 \cdot n - 2\right]$$

untersuchen. Beantworten Sie dazu folgende Fragen.

- Formen Sie mit Hilfe des CLT $P[\sum_{i=1}^{81} X_i \leq 81 \cdot n - 2]$ so weit um, dass Sie danach in c) nur noch den Wert in der Normalverteilungstabelle ablesen müssen.
- Wogegen strebt diese Wahrscheinlichkeit, wenn $n \rightarrow \infty$?
- Welchen Wert erhalten Sie in Teilaufgabe a), wenn $n = 8$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } &\approx P(\mathcal{N}(0, 1) \leq \frac{-2}{\sqrt{81 \cdot 2n}}) = F\left(-\frac{2}{9\sqrt{2n}}\right) = \Phi\left(-\frac{2}{9\sqrt{2n}}\right) \\ \text{b) } &\Phi(0) = 0.5 \quad \text{c) } F\left(-\frac{1}{18}\right) = 0.47785 \end{aligned}$$

FS21 - Aufgabe 4B:

Sie geben in R den Befehl `(sum(rchisq(400, df=5))-a)/(20*b)` ein (**a** und **b** seien konkrete, reelle Zahlen).

- Welche Werte müssen Sie für **a** und **b** wählen, damit Sie den CLT anwenden können?
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass `(sum(rchisq(400, df=5)))` grösser als 1980 ist?
Benutzen Sie den CLT zur Berechnung.

Lösung:

$$\text{a) } a = 2000, b = \sqrt{10} \quad \text{b) } 1 - F(-0.31623) \approx 0.6255$$

FS21 - Aufgabe 4A:

Sie geben in R den Befehl `(sum(rchisq(900, df=3))-a)/(30*b)` ein (**a** und **b** seien konkrete, reelle Zahlen).

- Welche Werte müssen Sie für **a** und **b** wählen, damit Sie den CLT anwenden können?
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass `(sum(rchisq(900, df=3)))` grösser als 2680 ist?
Benutzen Sie den CLT zur Berechnung.

Lösung:

$$\text{a) } a = 2700, b = \sqrt{6} \quad \text{b) } 1 - F(-0.27217) = 0.6103$$

Rep-FS20 - Aufgabe 4:

Sei $(X_i)_{i=1}^{64}$ eine iid Folge von $\text{Ge}(0.5)$ -Zufallsgrössen. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit

$$P\left[\sum_{i=1}^{64} X_i \leq 120\right]$$

untersuchen. Beantworten Sie dazu folgende beiden Fragen, welche unabhängig voneinander beantwortet werden können:

- a) Berechnen Sie mit Hilfe des CLT $P[\sum_{i=1}^{64} X_i \leq 120]$.
- b) Wie lautet der R-Befehl, damit Sie mit $\sum_{i=1}^{64} X_i$ startend eine normierte Zufallsgrösse erhalten? Bitte R-Ausdruck ganz deutlich aufschreiben (Klammern, Kommas, Punkte und sonstige Zeichen). Vorsicht: R definiert die $\text{Ge}(p)$ -Zufallsgrösse derart, dass man die Anzahl Misserfolge bis zum Erfolg zählt.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } F(-1/\sqrt{2}) &= 0.23975 \\ \text{b) } (\text{sum}(\text{rgeom}(64, 0.5)) - 64 * (2-1)) / (\text{sqrt}(64) * \text{sqrt}(1/0.5)) \\ &= (\text{sum}(\text{rgeom}(64, 0.5)) - 64) / (8 * \text{sqrt}(2)) \end{aligned}$$

FS20 - Aufgabe 7a:

Sie geben in R den Befehl `(sum(rexp(625, rate=2))-a)/(25*b)` ein (a und b seien konkrete, reelle Zahlen).

- a) Welche Werte müssen Sie für a und b wählen, damit Sie den CLT anwenden können?
- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass `sum(rexp(625, rate=2))` grösser als 320 ist?
- Benutzen Sie den CLT zur Berechnung.

Lösung:

$$\text{a) } a = 312.5, \quad b = \frac{1}{2} \quad \text{b) } \approx 1 - P(\mathcal{N}(0, 1) \leq 0.6) = 0.2743$$

FS20 - Aufgabe 7b:

Sie geben in R den Befehl `(sum(rpois(484, 4))-a)/(22*b)` ein (a und b seien konkrete, reelle Zahlen).

- a) Welche Werte müssen Sie für a und b wählen, damit Sie den CLT anwenden können?
- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass `sum(rpois(484, 4))` grösser als 1969 ist?
- Benutzen Sie den CLT zur Berechnung.

Lösung:

$$\text{a) } a = 1936, \quad b = 2 \quad \text{b) } \approx 1 - P(\mathcal{N}(0, 1) \leq 0.75) = 0.2266$$

FS20 - Aufgabe 7c:

Sie geben in R den Befehl `(sum(rnorm(441, 2, 1))-a)/(21*b)` ein (a und b seien konkrete, reelle Zahlen).

- a) Welche Werte müssen Sie für a und b wählen, damit Sie den CLT anwenden können?
- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass `sum(rnorm(441, 2, 1))` grösser als 890 ist?
- Benutzen Sie den CLT zur Berechnung.

Lösung:

$$\text{a) } a = 882, \quad b = 1 \quad \text{b) } \approx 1 - P(\mathcal{N}(0, 1) \leq \frac{8}{21}) = 0.3520$$

FS20 - Aufgabe 7d:

Sie geben in R den Befehl `(sum(runif(529, min=1, max=3))-a)/(23*b)` ein (a und b seien konkrete, reelle Zahlen).

- a) Welche Werte müssen Sie für a und b wählen, damit Sie den CLT anwenden können?
 b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass `sum(runif(529, min=1, max=3))` grösser als 1060 ist?
 Benutzen Sie den CLT zur Berechnung.

Lösung:

$$\text{a) } a = 1058, \quad b = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \text{b) } \approx 1 - P(\mathcal{N}(0, 1) \leq 0.1506) = 0.4401$$

FS20 - Aufgabe 7e:

Sie geben in R den Befehl `(sum(rchisq(576, 2))-a)/(24*b)` ein (a und b seien konkrete, reelle Zahlen).

- a) Welche Werte müssen Sie für a und b wählen, damit Sie den CLT anwenden können?
 b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass `sum(rchisq(576, 2))` grösser als 1280 ist?
 Benutzen Sie den CLT zur Berechnung.

Lösung:

$$\text{a) } a = 1152, \quad b = 2 \quad \text{b) } \approx 1 - P(\mathcal{N}(0, 1) \leq \frac{8}{3}) = 0.0038$$

Rep-FS19 - Aufgabe 4:

Sei $(X_i)_{i=1}^{80}$ eine iid Folge von $\text{Be}(0.6)$ -Zufallsgrössen. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit

$$P\left[\sum_{i=1}^{80} X_i < 53\right]$$

untersuchen. Beantworten Sie dazu folgende beiden Fragen, welche unabhängig voneinander beantwortet werden können.

- a) Berechnen Sie mit Hilfe des CLT $P[\sum_{i=1}^{80} X_i < 53]$.
 b) Wie lautet der R-Befehl, damit Sie mit $\sum_{i=1}^{80}$ startend eine normierte Zufallsgrösse erhalten? Bitte den R-Ausdruck ganz deutlich aufschreiben (Klammern, Kommas, Punkte und sonstige Zeichen).

Lösung:

$$\text{a) } \Phi(1.141089) \approx 0.873 \quad \text{b) } (\text{sum(rbinom}(80,1,0.6) - 48)/(\text{sqrt}(80*0.4*0.6)))$$

FS19 - Aufgabe 4:

In R geben Sie den Befehl `(sum(rexp(900, rate=4))-a)/(30*b)` ein (a und b seien konkrete, reelle Zahlen).

- a) Welche Werte müssen Sie für a und b wählen, damit Sie den CLT anwenden können?
 b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass `(sum(rexp(900, rate=4))` grösser als 232 ist?
 Benutzen Sie den CLT zur Berechnung.

Lösung:

$$\text{a) } a = 225, \quad b = 0.25 \quad \text{b) } 1 - \Phi(14/15) \approx 0.175$$

Rep-FS18 - Aufgabe 4:

$X_1, \dots, X_{100}$ seien iid t_5 -verteilte Zufallsgrößen. Wir definieren für $1 \leq i \leq 100$: $Y_i = X_i + 2$. Benutzen Sie den CLT, um abzuschätzen, wie gross

$$P\left[\sum_{i=1}^{100} Y_i < 220\right]$$

ist. Sie dürfen dazu unbewiesene Resultate aus dem Skript benutzen.

Lösung:

$$F(1.549) \approx 0.9394$$

FS18 - Aufgabe 4:

In R geben Sie den Befehl `(sum(rchisq(100, df=2))-a)/(10*b)` ein (a und b seien konkrete, reelle Zahlen).

- a) Welche Werte müssen Sie für a und b wählen, damit Sie den CLT anwenden können?
- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass `(sum(rchisq(100, df=2)))` grösser als 180 ist?
- Benutzen Sie den CLT zur Berechnung.

Lösung:

$$\text{a) } a = 200, b = 2 \quad \text{b) } \approx 0.8413$$

Rep-FS17 - Aufgabe 4:

$X_1, \dots, X_{100}$ seien iid $F_{2,5}$ -verteilte Zufallsgrößen. Benutzen Sie den CLT, um abzuschätzen, wie gross

$$P\left[\sum_{i=1}^{100} X_i > 170\right]$$

ist. Sie dürfen dazu unbewiesene Resultate aus dem Skript benutzen.

Lösung:

$$1 - F(0.08944) \approx 0.4641$$

FS17 - Aufgabe 4:

Seien $X_1, \dots, X_{900}$ iid $U[2,4]$ -Zufallsgrößen.

- a) Berechnen Sie mit Hilfe des CLT

$$P\left[\sum_{i=1}^{900} X_i > 2670\right].$$

- b) Sei $Y := \sum_{i=1}^{900} X_i$. Berechnen Sie mit Hilfe des CLT das 10 % Quantil von Y.

Lösung:

$$\text{a) } 1 - F(-1.732) \approx 0.9582 \quad \text{b) } 2678 (= 2700 - 30 \cdot 1.28/\sqrt{3})$$

Rep-FS16 - Aufgabe 4:

$X_1, \dots, X_{50}$ seien iid χ_4^2 -verteilte Zufallsgrößen. Benutzen Sie den CLT, um abzuschätzen, wie gross

$$P\left[\sum_{i=1}^{50} X_i > 193\right]$$

ist. Sie dürfen dazu unbewiesene Resultate aus dem Skript benutzen.

Lösung:

$$1 - F(-0.35) \approx 0.6368$$

FS16 - Aufgabe 4:

Sie werfen einen fairen Würfel mehrmals.

- 1.) X sei die Anzahl Würfe, bis zum ersten Mal eine "6" erscheint. Wie gross sind $E[X], V[X]$?
- 2.) Die Zufallsgrösse Y gebe an, wie lange es dauert (Anzahl Würfe), bis man zum 100-ten Mal eine "6" hat.
Benutzen Sie den CLT zur Bestimmung von $P[Y \geq 610]$.
- 3.) Benutzen Sie den CLT um den Median von Y zu berechnen.

Lösung:

$$1) E[X] = 6, V[X] = 30 \quad 2) 1 - F(0.1826) \approx 0.428 \quad 3) \tilde{x} = 600$$

Rep-FS15 - Aufgabe 4:

$X_1, \dots, X_{100}$ seien iid t_5 -verteilte Zufallsgrößen. Benutzen Sie den CLT, um abzuschätzen, wie gross

$$P\left[\sum_{i=1}^{100} X_i > -5\right]$$

ist. Sie dürfen dazu unbewiesene Resultate aus dem Skript benutzen.

Lösung:

$$0.648$$

Rep-FS15 - Aufgabe 5:

Sie werfen 60 mal eine Münze, um zu testen, ob sie fair ist oder nicht. Das Resultat ist 25 Kopf und 35 Zahl. Benutzen Sie den CLT, um approximativ auf dem 5%-Niveau zu testen, ob die Münze fair ist oder nicht.

Lösung:

$$\sum X_i \in [22.4, 37.6] \Rightarrow \mathcal{H}_0, \text{ d.h. Münze fair}$$

FS15 - Aufgabe 4:

Sie werfen einen fairen Würfel 1000 Mal und zählen die Augenzahlen zusammen. Berechnen Sie mit Hilfe des CLT, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass diese Zahl

- 1.) echt kleiner als 3400
- 2.) im Intervall $[3400, 3650]$ liegt.
- 3.) Wenn Sie in **R** den Befehl `sum(sample(1 : 6, size = n, replace = TRUE))/n` mit immer grösserem n eingeben; wogegen konvergiert das Resultat des Befehls und warum?

Als kleine Hilfe: wenn man in **R** `?sample` eingibt, kommt folgende Hilfe (hier nur ein Ausschnitt):

```
sample(x, size, replace = FALSE, prob = NULL)
```

Arguments

x Either a vector of one or more elements from which to choose, or a positive integer.

size a non-negative integer giving the number of items to choose.

replace Should sampling be with replacement?

Lösung:

1.) 0.0322 2.) 0.967 3.) 3.5 (LLN)

Rep-FS14 - Aufgabe 4: **Anspruchsvoll wegen "fiesem" Summen-Detail !!!**

Sie geben in R den Befehl `sum(rbinom(1000, 100, 0.5) - 50)/sqrt(25000)` ein. Schätzen Sie mit Hilfe des CLT ab, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass dieser Ausdruck grösser als 1.5 ist.

Lösung:

$1 - \Phi(1.5) \approx 1 - 0.9332 = 0.0668$

FS14 - Aufgabe 4:

- 1.) Sie werfen eine Münze 1000 Mal und zählen die relative Häufigkeit von Kopf. Berechnen Sie mit Hilfe des CLT, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass die relative Häufigkeit von Kopf bei einer fairen Münze grösser als 0.51 ist.
- 2.) Warum erwarten Sie überhaupt, dass die relative Häufigkeit von Kopf bei einer fairen Münze gegen 0.5 konvergiert? Mit *exakter* Begründung bitte (Nennung Satz und Besprechung der Voraussetzungen).

Lösung:

1.) $1 - \Phi(0.632) = 0.261$
 2.) Satz von Kolmogoroff. • Unabhängige Würfe • gleiche Verteilung • $\mu = E[X_1] = 0.5 < \infty$

Rep-FS13 - Aufgabe 4:

Ein Würfel wird 2100 mal geworfen. Sie zählen dabei die Häufigkeit des Auftretens der Augenzahl 5 und 6. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zusammen zwischen 660 und 720 mal eine 5 oder 6 auftritt? Benutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz (CLT).

Lösung:

$\Phi\left(\frac{(720 - 700)/(\sqrt{2100} \cdot \sqrt{2/9})}{1}\right) - \Phi\left(\frac{(660 - 700)/(\sqrt{2100} \cdot \sqrt{2/9})}{1}\right) \approx 0.82381 - 0.03216 = 0.79165$

FS13 - Aufgabe 4:

Auf einer bestimmten Maschine werden Bolzen der Länge 10 hergestellt. Die Längen der Bolzen variieren leicht, jedoch unabhängig voneinander. Man hat festgestellt, dass die Länge ziemlich genau uniform-verteilt ist im Intervall $[9.9, 10.1]$. Sie stellen jetzt 100 Bolzen her. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Gesamtsumme der Längen grösser als 1003 ist? Benutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz (CLT).

Lösung:

$$1 - \Phi(5.196) \approx 0$$

Rep-FS12 - Aufgabe 4:

Angenommen, 60 % der Stimmbevölkerung sind für die "Initiative gegen Passivrauchen". Sie haben jetzt zufällig eine Stichprobe von 1000 Personen gewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen weniger als 580 für die Initiative sind? Benutzen Sie zur Berechnung den CLT.

Lösung:

$$n = 1000, \mu_i = 0.6, \sigma_i = \sqrt{0.24} \rightarrow \Phi(-1.29) \approx 0.09853$$

FS12 - Aufgabe 4:

$X_i, 1 \leq i \leq 100$, seien unabhängige Zufallsgrössen mit gleicher Verteilung; und zwar $P[X_i = -1] = P[X_i = 1] = 0.5$.

- Welche Werte kann $\sum_{i=1}^{100} X_i$ alles annehmen?
- Berechnen Sie $E\left[\sum_{i=1}^{100} X_i\right]$, $V\left[\sum_{i=1}^{100} X_i\right]$ und $sd\left[\sum_{i=1}^{100} X_i\right]$. Begründen Sie die jeweiligen Rechenschritte.
- Berechnen Sie mit Hilfe des CLT $P\left[\sum_{i=1}^{100} X_i > 10\right]$.

Lösung:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \{-100, -98, -96, \dots, 98, 100\} & \text{b) } E\left[\sum_{i=1}^{100} X_i\right] = 0, \\ V\left[\sum_{i=1}^{100} X_i\right] = 100, SD\left[\sum_{i=1}^{100} X_i\right] = 10 & \text{c) } 0.1587 = P[\mathcal{N}(0, 1) > 1] \end{array}$$

Rep-FS11 - Aufgabe 4:

Sei $X_i, i \in \{1, \dots, 49\}$, eine Folge von unabhängigen, uniformverteilten Zufallsgrössen, genau $U[0, \sqrt{3}]$. Berechnen Sie mit Hilfe des CLT

$$P\left[\sum_{i=1}^{49} X_i \in [35, 50]\right].$$

Lösung:

$$F(2.16) - F(-2.12) \approx 0.9676$$

FS11 - Aufgabe 4:

- a) Für eine komplizierte Polarexpedition von 100 Tagen Dauer benötigen sie ein Gerät, welches leider lediglich eine durchschnittliche Lebensdauer von einem Tag hat. Also werden im Durchschnitt 100 Geräte benötigt (1+99 Ersatz). Zur Sicherheit nehmen Sie jetzt total 103 Geräte mit. Modellieren Sie die Lebensdauer eines Gerätes mit einer exponentialverteilten Zufallsgrösse und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Expedition scheitert, weil sie zu wenig Geräte dabei haben. Benutzen Sie den CLT.
- b) Wieviele Geräte müssten Sie mitnehmen, damit die Expedition lediglich mit 5 % Wahrscheinlichkeit wegen dieser Geräte scheitert (wieder mit CLT)?

Lösung:

$$\text{a) } F(-0.2956) \approx 0.3821 \quad \text{b) } \frac{100-n}{\sqrt{n}} = -1.645 \rightarrow n = 118$$

FS10 - Aufgabe 4:

Sei $(X_i)_{i=1}^{100}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsgrössen mit einer geometrischen Verteilung mit Parameter $p = 0.8$. Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes approximativ die folgende Wahrscheinlichkeit

$$P\left[\sum_{i=1}^{100} X_i \in [110, 140]\right].$$

Lösung:

$$F(2.683) - F(-2.683) \approx 0.993$$

FS09 - Aufgabe 3:

- a) Seien $(X_i)_{i=1}^{100}$ iid $U[0,1]$ -Zufallsgrössen. Berechnen Sie unter Verwendung des CLT

$$P\left[\sum_{i=1}^{100} X_i \in [44, 52]\right].$$

- b) Seien $(X_i)_{i=1}^{100}$ iid $U[0,2]$ -Zufallsgrössen. Berechnen Sie unter Verwendung des CLT

$$P\left[\sum_{i=1}^{100} X_i \in [93, 105]\right].$$

Lösung:

$$\text{a) } \Phi(0.693) - \Phi(-2.078) \approx 0.735 \quad \text{b) } \Phi(0.866) - \Phi(-1.212) \approx 0.692$$

FS08 - Aufgabe 4:

Petri Fischer geht mit seinem Fischkutter Aurora auf Fischfang. Im heutigen Fanggebiet ist das Gewicht der Fische normalverteilt mit Erwartungswert 500 Gramm und Varianz 50 Gramm². Er fängt 3600 Fische.

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese 3600 Fische mehr als 1820 Kilogramm wiegen (die maximal erlaubte Nutzlast)? Benutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz zur Berechnung.
- Abgesehen von der Verwendung der Normalverteilungstabelle: Gibt der zentrale Grenzwertsatz hier ein exaktes oder ein approximatives Resultat? Antwort bitte mit Begründung.

Lösung:

$$a) P[\mathcal{N}(0, 1) > 47.1] = 1 - \Phi(47.1) = 1 - 1 = 0$$

b) exakt, da X_i normalverteilt

FS07 - Aufgabe 4:

Auf einer Expedition von voraussichtlich 900 Tagen Dauer, müssen Sie immer wieder eine Spezialglühbirne auswechseln. Die durchschnittliche Brenndauer ist nur gerade 1 Tag. Sie nehmen jetzt 1000 solcher Spezialglühbirnen mit.

- Mit welcher Zufallsgrösse modelliert man sinnvollerweise die Brenndauer einer Glühbirne?
- Berechnen Sie in diesem Modell mit Hilfe des CLT, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass die 1000 Spezialglühbirnen bereits vor Ende der Expedition, also schneller als in 900 Tagen, aufgebraucht sind und Sie somit die Expedition abbrechen müssen.
- Stellen Sie sich vor, die Expedition musste beendet werden, weil bereits nach 893 Tagen alle Spezialglühbirnen aufgebraucht waren. Sie haben jetzt Zweifel, ob die Herstellerangaben einer durchschnittlichen Brenndauer von einem Tag wirklich stimmt. Formulieren Sie hierzu die Hypothese eines Tests und berechnen Sie mit Hilfe des CLT den P-Wert für dieses Ereignis.

Lösung:

$$a) \exp(\lambda) \quad b) F(-3.16) = 0.0007$$

$$c) \mathcal{H}_0 : E(X) \geq 1(\lambda \leq 1), \mathcal{H}_1 : E(X) < 1(\lambda > 1)$$

$$0.0039 < 5.59 \rightarrow \mathcal{H}_0 \text{ behalten}$$

$$P[\sum_{i=1}^{1000} X_i < 893] = P[\mathcal{N}(0, 1) < -3.38] = 0.0003$$

FS06 - Aufgabe 4:

Die Anzahl Passagiere auf dem täglichen Flug Zürich-New York der Airline "Nevercrash" sei an Werktagen durchschnittlich 220. Nehmen Sie erstmals an, dass diese Zahl sinnvollerweise mit einer Poisson-Zufallsgrösse modelliert werden kann und benutze Sie danach den CLT um abzuschätzen, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass auf einmal mehr als 260 Passagiere diesen Flug nehmen wollen.

Lösung:

$$P[Z > 2.6968] = 1 - \Phi(2.6968) = 0.0036$$