

Aufgabe 2: "Wahrscheinlichkeiten umformen"

Rep-FS22 - Aufgabe 2:

a) Sei X eine $\text{Bin}(2, 0.5)$ -Zufallsgrösse und Y eine davon unabhängige $\text{Bin}(3, 0.5)$ -Zufallsgrösse.

Berechnen Sie $P[X + Y = 5]$.

b) Sei X eine $\text{Po}(2)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[\ln(X) \leq 1]$.

c) Sei X eine $\text{Po}(2)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie den Median von $\ln(X)$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \binom{5}{5} 0.5^5 0.5^0 = 1/32 \quad \text{b) } P(X \leq 2) = 0.676676 \\ \text{c) } & f(X) \text{ streng monoton} \rightarrow \text{Median} = \ln(2) \end{aligned}$$

FS22 - Aufgabe 2B:

Sei X eine $\text{Exp}(3)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie

a) $P[4^X \leq 3]$.

b) den Median von $Y := \ln(X + 1)$

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } & P[X \leq \frac{\ln(3)}{\ln(4)}] = 1 - e^{-3 \frac{\ln(3)}{\ln(4)}} = 0.9072 \\ \text{b) } & \text{Median von } Y \text{ ist } \ln(\frac{\ln(2)}{3} + 1) = 0.2079 \end{aligned}$$

FS22 - Aufgabe 2A:

Sei X eine $\text{Exp}(2)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie

a) $P[3^X \leq 2]$.

b) den Median von $Y := \ln(X + 1)$

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } & P[X \leq \frac{\ln(2)}{\ln(3)}] = 1 - e^{-2 \frac{\ln(2)}{\ln(3)}} = 0.7169 \\ \text{b) } & \text{Median von } Y \text{ ist } \ln(\frac{\ln(2)}{2} + 1) = 0.2976 \end{aligned}$$

Rep-FS21 - Aufgabe 2:

a) Sei X eine $\mathcal{N}(10, 9)$ -Zufallsgrösse und Y eine davon unabhängige $\mathcal{N}(20, 16)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[X + Y \in [29, 32]]$.

b) Sei X eine $U[0, 2]$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[e^{1/X} \leq 2]$. Was ist der Median von $1/X$?

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } & P[\mathcal{N}(30, 25) \in [29, 32]] = F(0.4) - F(-0.2) = 0.23468 \\ \text{b) } & 1 - F(1/\ln(2)) = 0.27865, \quad f(X) \text{ streng monoton} \rightarrow \text{Median} = 1 \end{aligned}$$

FS21 - Aufgabe 2B:

Sei X eine $U[0, 3]$ -Zufallsgrösse und $Y := e^{\sqrt{X}-1}$.

- a) Berechnen Sie $P[Y \geq 1]$.
- b) Wie ist der Median von Y ?
- c) Wie ist der Wertebereich von Y ?

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } 1 - P[X < 1] &= 1 - \frac{1-0}{3-0} = \frac{2}{3} \\ \text{b) Median von } Y \text{ ist } e^{\sqrt{1.5}-1} &= 1.252 \quad \text{c) } [e^{-1}, e^{\sqrt{3}-1}] \end{aligned}$$

FS21 - Aufgabe 2A:

Sei X eine $\text{Exp}(2)$ -Zufallsgrösse und $Y := \ln(X^2 + 1)$.

- a) Berechnen Sie $P[Y \geq 1]$.
- b) Wie ist der Median von Y ?
- c) Wie ist der Wertebereich von Y ?

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } 1 - P[X \leq \sqrt{e^1 - 1}] &= 1 - (1 - e^{-2\sqrt{e-1}}) = 0.072682 \\ \text{b) Median von } Y \text{ ist } \ln\left(\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)^2 + 1\right) &= 0.11343 \quad \text{c) } \ln(1), \infty = [0, \infty) \end{aligned}$$

Rep-FS20 - Aufgabe 2:

- a) Sei X eine $\mathcal{N}(5, 4)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[X^2 \in [23, 28]]$.
- b) Sei X eine $\text{Bin}(10, 0.5)$ -Zufallsgrösse. Was ist der Median von $Y := e^X$?

Lösung:

$$\text{a) } F\left(\frac{\sqrt{28}-5}{2}\right) - F\left(\frac{\sqrt{23}-5}{2}\right) + F\left(\frac{-\sqrt{23}-5}{2}\right) - F\left(\frac{-\sqrt{28}-5}{2}\right) = 0.098567 \quad \text{b) Median} = e^5$$

FS20 - Aufgabe 5a:

Sei X eine $\text{exp}(1)$ -Zufallsgrösse und $Y := e^{(X-2)} + 3$.

- a) Berechnen Sie $P[Y \in [3, 5]]$.
- b) Wie ist der Median von Y ?

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } P[X \leq \ln(2) + 2] &= F(\ln(2) + 2) = 1 - e^{-1 \cdot (\ln(2)+2)} = 1 - \frac{1}{2e^2} \\ \text{b) Median} &= e^{(\ln(2)-2)} + 3 = 2e^{-2} + 3 \end{aligned}$$

FS20 - Aufgabe 5b:

Sei X eine $Po(1)$ -Zufallsgrösse und $Y := 3 \ln(X + 2)$.

- a) Berechnen Sie $P[Y \in [2, 4]]$.
- b) Wie ist der Median von Y ?

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } P[e^{2/3} - 2 \leq X \leq e^{4/3} - 2] &= P[-0.0523 \leq X \leq 1.7937] = P(X=0) + P(X=1) = 2e^{-1} \\ \text{b) Median} &= 3 \ln(3) \end{aligned}$$

FS20 - Aufgabe 5c:

Sei X eine $U[2, 4]$ -Zufallsgrösse und $Y := \sqrt{e^X - 6}$.

- a) Berechnen Sie $P[Y \in [-2, 4]]$.
 b) Wie ist der Median von Y ?

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } P[\ln(6) \leq X \leq \ln(22)] &= P[1.79 \leq X \leq 3.09] \\ &= F(\ln(22)) - F(2) = \dots = \frac{\ln(22) - 2}{2} \\ \text{b) Median} &= \sqrt{e^3 - 6} \end{aligned}$$

FS20 - Aufgabe 5d:

Sei X eine $Ge(1/3)$ -Zufallsgrösse und $Y := 3 - e^{X-4}$.

- a) Berechnen Sie $P[Y \in [1, 3]]$.
 b) Wie ist der Median von Y ?

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } P[X \leq \ln(2) + 4] &= P[X \leq 4] = 1 - P[X > 4] = 1 - (2/3)^4 \\ \text{b) Median} &= 3 - e^{-2} \end{aligned}$$

FS20 - Aufgabe 5e:

Sei X eine $\exp(1/3)$ -Zufallsgrösse und $Y := 1/\ln(e^X + 2)$.

- a) Berechnen Sie $P[Y \in [-1, 1/2]]$.
 b) Wie ist der Median von Y ?

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } P[\ln(e^2 - 2) \leq X] &= 1 - F(\ln(e^2 - 2)) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot (\ln(e^2 - 2))}) = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2 - 2}} \\ \text{b) Median} &= 1/\ln(e^{3 \ln(2)} + 2) = 1/\ln(10) \end{aligned}$$

Rep-FS19 - Aufgabe 2:

- a) Sei X eine $\mathcal{N}(2, 3)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[e^X \in [1, 3]]$.
 b) Sei X eine $\mathcal{N}(2, 3)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[1/(1 + X^2) < 2]$.

Lösung:

$$\text{a) } \Phi((\ln 3 - 2)/\sqrt{3}) - \Phi(-2/\sqrt{3}) \approx 0.17728 \quad \text{b) } P[0 < X^2] = 1$$

FS19 - Aufgabe 2:

Sei X eine $\exp(1/2)$ -Zufallsgrösse und $Y := X^3 - 2$.

- a) Berechnen Sie $P[Y \in [-3, -1] \cup [2, 4]]$.
- b) Wie ist der Median von Y ?
- c) (*braucht zündende Idee*) Sei Z eine χ_2^2 -Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[Z > 1]$ ohne einen Taschenrechner vorhandene Verteilungsfunktion der χ_2^2 -Zufallsgrösse zu benutzen. Erklären Sie, wie Sie dies lösen konnten.

Lösung:

$$\text{a) } (1 - e^{-0.5}) + (1 - e^{-\sqrt[3]{6}/2}) - (1 - e^{-\sqrt[3]{4}/2}) \approx 0.4425$$

$$\text{b) Median ist } (\ln(4))^3 - 2$$

$$\text{c) } \chi_2^2 \equiv \exp(0.5) \rightarrow 1 - (1 - e^{-0.5}) \approx 0.6065$$

Rep-FS18 - Aufgabe 2:

Sei X eine $\exp(3)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie

$$P[\ln(X + 1) \in [1, 2]]$$

Lösung:

$$F(e^2 - 1) - F(e^1 - 1) = \dots = e^{-3(e-1)} - e^{-3(e^2-1)}$$

FS18 - Aufgabe 2:

Sei X eine $U[0, 2]$ -Zufallsgrösse und $Y := X^2 + 1$.

- a) Berechnen Sie $P[Y \in [2, 3] \cup [3.5, 4]]$.
- b) Wie ist der Median von Y ?

Lösung:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{2}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2.5}}{2} \approx 0.28256 \quad \text{b) Median} = 2$$

Rep-FS17 - Aufgabe 2:

Sei X eine $\exp(2)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie

$$P[\sqrt{X} - 2 \in [-2, 4]].$$

Lösung:

$$1 - \exp(-72) \approx 1$$

FS17 - Aufgabe 2:

Sei X eine $\exp(2)$ -Zufallsgrösse.

- a) Berechnen Sie $P[2^X + 1 \leq 3]$.
- b) Was ist der Median von $X^2 + 3$?

Lösung:

$$\text{a) } 1 - e^{-2} \approx 0.8647 \quad \text{b) Median} = (0.5 \ln 2)^2 + 3 \approx 3.12$$

Rep-FS16 - Aufgabe 2:

Sei X eine $\mathcal{N}(2, 4)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie

$$P[X^2 - 2 \in [2, 4]].$$

Lösung:

$$0.096 = F(0.22) - F(0) + F(-2) - F(-2.22)$$

FS16 - Aufgabe 2:

Sei X eine $\exp(1)$ Zufallsgrösse.

- 1.) Berechnen Sie $P[\sqrt{X^2 + 2} \leq 4]$.
- 2.) Wie ist der Median von $\sqrt{X^2 + 2}$?

Lösung:

$$\begin{aligned} 1.) \quad & 1 - e^{-\sqrt{14}} \approx 0.976 \\ 2.) \quad & \text{Median} = a \approx 1.575 \quad (\leftarrow e^{-\sqrt{a^2 - 2}} = 0.5) \end{aligned}$$

Rep-FS15 - Aufgabe 2:

Sei X eine exponentialverteilte Zufallsgrösse mit Parameter $\lambda = 2$. Berechnen Sie $P[e^X \in [e, e^2]]$.

Lösung:

$$e^{-2} - e^{-4} \approx 0.117$$

FS15 - Aufgabe 2:

- 1.) Sei X eine $\mathcal{N}(3, 4)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[e^{1+X^2} \leq 4]$.
- 2.) Sei X eine $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsgrösse. Sei $Y := e^{1+X^2}$.

Wo ist der Median von Y ; wo erreicht die Verteilungsfunktion von Y den Wert 0.9?

Lösung:

$$\text{a) } 0.0819 \quad \text{b) Median} \approx 4.26, \approx 40 \quad (P = 0.9)$$

Rep-FS14 - Aufgabe 2:

Sie geben in R den Befehl $(\text{rbinom}(1, 2, 0.5) - 1)^2$ ein. Welche theoretische Verteilung hat diese Realisation?

Lösung:

$$\text{Be}(0.5)$$

FS14 - Aufgabe 2:

Sei X eine $\exp(2)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[1 \leq \sqrt{X} \leq 2]$.

Lösung:

$$F(4) - F(1) = 1 - e^{-8} - (1 - e^{-2}) = 0.1349998$$

Rep-FS13 - Aufgabe 2:

Sei $X \sim \mathcal{N}(1, 9)$. Berechnen Sie

$$P[\ln(|X|) \in [2, 4]].$$

Lösung:

$$\Phi((e^4 - 1)/3) - \Phi((e^2 - 1)/3) + \Phi((-e^2 - 1)/3) - \Phi((-e^4 - 1)/3) \\ \approx 1 - 0.98341 + 0.00272 - 0 = 0.01931$$

FS13 - Aufgabe 2:

Sei $X \sim \mathcal{N}(2, 4)$. Berechnen Sie $P[e^{X^2} \in [1, 2]]$.

Lösung:

$$\Phi\left(\frac{-\sqrt{\ln(2)}-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{\ln(2)}-2}{2}\right) \approx 0.2017$$

Rep-FS12 - Aufgabe 2: (1+1 Punkte)

X sei eine stetige Zufallsgrösse, uniform auf dem Intervall $[2, 3]$ verteilt, also eine $U[2, 3]$ -ZG.

- 1.) Berechnen Sie den Median von X^2 .
- 2.) Berechnen Sie $P[X^3 \in [19, 36]]$.

Lösung:

$$1.) P(X^2 \leq a) = 0.5 \rightarrow a = 6.25 = \text{Median} \\ 2.) P(\sqrt[3]{19} \leq X \leq 3) = 0.332$$

FS12 - Aufgabe 2:

- a) X sei $\text{Ge}(p)$ -verteilt, also $P[X = k] = p(1-p)^{k-1}$, wo $k \geq 1$. p sei 0.5. Berechnen Sie $P[X^2 \in [-1.3, 2]]$.
- b) Wir haben die geometrische Verteilung in dieser Vorlesung derart eingeführt, dass mit k die Anzahl Versuche bis zum ersten Erfolg gezählt wird. Man kann aber auch gleichwertig die geometrische Verteilung so einführen, dass man die Anzahl Misserfolge bis zum ersten Erfolg zählt. Geben Sie für diese alternative Definition den Wertebereich und die Wahrscheinlichkeitsfunktion an.

Lösung:

$$a) P[X = 1] = 0.5 \quad b) P[X = k] = p(1-p)^k, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Rep-FS11 - Aufgabe 2:

X habe eine Exponentialverteilung mit Parameter 1.

- a) Geben Sie den Median an.
- b) Berechnen Sie $P[X < 1]$.
- c) Berechnen Sie $P[X^2 < 2]$.

Lösung:

$$a) \text{Median} = \ln(2) \quad b) 1 - e^{-1} \approx 0.6321 \quad c) 1 - e^{-\sqrt{2}} \approx 0.7569$$

FS11 - Aufgabe 2:

- a) Sei X eine exponentialverteilte Zufallsgrösse mit Parameter $\lambda = 2$. Berechnen Sie $P[X \in [3, 4]]$.
- b) Sei X eine exponentialverteilte Zufallsgrösse mit Parameter $\lambda = 2$. Berechnen Sie $P[X^2 \in [3, 4]]$.
- c) Sei X eine exponentialverteilte Zufallsgrösse mit Parameter $\lambda = 2$. Berechnen Sie $P[\log(X) \in [3, 4]]$;

dabei bezeichne "log" den natürlichen Logarithmus.

Lösung:

a) $F(4) - F(3) \approx 0.00214$ oder $\int_3^4 2e^{-2x} dx = 0.00214$
b) $F(2) - F(\sqrt{3}) \approx 0.013$ c) $F(e^4) - F(e^3) \approx 0$

FS10 - Aufgabe 2:

- a) Sei X eine $\mathcal{N}(5, 25)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[-10 < X^2 < 10]$.
- b) Wie ist in a) die Wahrscheinlichkeit für $P[-10 \leq X^2 \leq 10]$ (Antwort ohne Begründung erlaubt).
- c) Sei X eine $\exp(2)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[-10 < X^2 < 10]$.

Lösung:

a) $\Phi(-0.3675) - \Phi(-1.6325) \approx 0.301$
b) gleich c) $F(\sqrt{10}) \approx 0.99821$

FS09 - Aufgabe 2:

Sei X eine $\mathcal{N}(4, 9)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[X^2 \in [1, 4]]$.

Wir wollen die Umformungen explizit sehen.

Lösung:

$$\Phi\left(-\frac{5}{3}\right) - \Phi(-2) + \Phi\left(-\frac{2}{3}\right) - \Phi(-1) \approx 0.1221$$

FS09 - Aufgabe 4:

- a) Sei X eine $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsgrösse. Geben Sie Erwartungswert und Varianz von

$$3X^2$$

an. Sie dürfen dazu Resultate aus dem Skript benutzen. Teilaufgabe b) und c) sind schwieriger und es wird empfohlen, diese erst am Schluss zu probieren. Es gibt in allen 3 Teilaufgaben keine langen, komplizierten Rechnungen. Tipp: Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz, Z-Transformation und Kapitel 6.

- b) Sei X eine $\mathcal{N}(2, 1)$ -Zufallsgrösse. Geben Sie Erwartungswert und Varianz von

$$3X^2$$

an. Sie dürfen dazu Resultate aus dem Skript benutzen.

- c) Sei X eine $\mathcal{N}(2, 4)$ -Zufallsgrösse. Geben Sie Erwartungswert und Varianz von

$$3X^2$$

an. Sie dürfen dazu Resultate aus dem Skript benutzen.

Lösung:

$$\begin{aligned} X &\sim \mathcal{N}(0, 1) \rightarrow X^2 \sim \chi_1^2 \\ \text{a) } E[3X^2] &= 3E[\chi_1^2] = 3 \cdot 1 = 3 \\ \text{b) } 162, \text{ siehe ML} \quad \text{c) } 864, \text{ siehe ML} \end{aligned}$$

FS08 - Aufgabe 2:

Sei X eine $\exp(3)$ -Zufallsgrösse.

- a) Finden sie a , sodass $P[X \geq a] = 0.4$
- b) Finden sie b , sodass $P[1/X \geq b] = 0.6$

Bei dieser Aufgabe dürfen Sie den Taschenrechner erst am Schluss benutzen.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } e^{-3a} &= 0.4 \rightarrow a = 0.305 \\ \text{b) } 1 - e^{-3/b} &= 0.6 \rightarrow b = 3.274 \end{aligned}$$

FS07 - Aufgabe 2:

X habe eine $\mathcal{N}(4, 16)$ -Verteilung. Berechnen Sie $P[X^2 \in (-1, 4)]$.

Lösung:

$$F(-0.5) - F(-1.5) \approx 0.2417$$