

Aufgabe 3: "Zufallsgrößen"

Rep-FS22 - Aufgabe 3:

Die Zufallsgrösse X habe Dichtefunktion $f(x) = Kx^3$ auf $[0, 1]$ und sei 0 sonst. Berechnen Sie:

- a) K .
- b) $E(X)$.
- c) den Median.
- d) $V(X)$ und $sd(X)$.
- e) $F_X(a)$.

Lösung:

- a) $K = 4$ b) $E[X] = \frac{4}{5} = 0.8$ c) Median = $\sqrt[4]{0.5}$
d) $V[X] = \frac{2}{75}$, $sd[X] = \sqrt{\frac{2}{75}}$
e) $F_X(a) = 0$ für $a < 0$, a^4 für $a \in [0, 1]$, 1 für $a > 1$

FS22 - Aufgabe 3B:

Die Zufallsgrösse X nehme genau (also nur diese) folgende Werte mit folgenden Wahrscheinlichkeiten an: $P[X = 1] = 0.1$, $P[X = 2] = 0.3$, $P[X = 3] = 0.2$, $P[X = 4] = 0.2$, $P[X = 5] = a$.

- a) Berechnen Sie a und geben Sie den Median an.
- b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz.
- c) Berechnen Sie $P[X^2 + 1 \leq 5]$.
- d) Sei $f(x)$ eine streng monotone Funktion. Geben Sie als Funktion von f den Median von $Y := f(X)$ an.

Lösung:

- a) $a = 0.2$, Median ist 3 b) $E[X] = 3.1$, $V(X) = 1.69$
c) $P[-2 \leq X \leq 2] = 0.4$ d) der Median ist $f(3)$

FS22 - Aufgabe 3A:

Die Zufallsgrösse X nehme genau (also nur diese) folgende Werte mit folgenden Wahrscheinlichkeiten an: $P[X = 1] = 0.2$, $P[X = 2] = 0.2$, $P[X = 3] = 0.2$, $P[X = 4] = 0.1$, $P[X = 5] = a$.

- a) Berechnen Sie a und geben Sie den Median an.
- b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz.
- c) Berechnen Sie $P[X^2 - 1 \leq 3]$.
- d) Sei $f(x)$ eine streng monotone Funktion. Geben Sie als Funktion von f den Median von $Y := f(X)$ an.

Lösung:

- a) $a = 0.3$, Median ist 3 b) $E[X] = 3.1$, $V(X) = 2.29$
c) $P[-2 \leq X \leq 2] = 0.4$ d) der Median ist $f(3)$

Rep-FS21 - Aufgabe 3:

Die Zufallsgrösse X habe Dichtefunktion $f(x) = K(1 - x^2)$ auf $[-1, 1]$ und sei 0 sonst. Berechnen Sie:

- a) K .
- b) $E(X)$.
- c) $V(X)$ und $sd(X)$.
- d) $F_X(a)$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } K &= \frac{3}{4} & \text{b) } E[X] &= 0 & \text{c) } V[X] &= \frac{1}{5}, \quad sd[X] = \sqrt{\frac{1}{5}} \\ \text{d) } F_X(a) &= 0 \text{ für } a < -1, \quad -\frac{a^3}{4} + \frac{3a}{4} + \frac{1}{2} \text{ für } a \in [-1, 1], \quad 1 \text{ für } a > 1 \end{aligned}$$

FS21 - Aufgabe 3B:

Die Zufallsgrösse X nehme folgende Werte an: $P[X = 1] = 1/3, P[X = 2] = P[X = 3] = 1/6, P[X = 4] = 1/3$.

- a) Berechnen Sie $E[X]$ - geben Sie auch den Median an.
- b) Berechnen Sie $V[X]$ und $sd[X]$.
- c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion.
- d) Welches ist das kleinste a , sodass $P[X \leq a] \geq 0.75$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } E[X] &= 2.5 = \frac{2+3}{2}, \text{ Median ist auch } 2.5 \text{ (da symmetrische Verteilung)} \\ \text{b) } V[X] &= \frac{19}{12} = 1.5833, \quad sd[X] = \sqrt{19/12} = 1.2583 \\ \text{c) } F(a) &= 0 \text{ falls } a < 1, \quad \frac{1}{3} \text{ falls } a \in [1, 2), \quad \frac{3}{6} \text{ falls } a \in [2, 3), \quad \frac{4}{6} \text{ falls } a \in [3, 4), \quad 1 \text{ falls } a > 4 \\ \text{d) } a &= 4 \end{aligned}$$

FS21 - Aufgabe 3A:

Die Zufallsgrösse X nehme folgende Werte an: $P[X = 0] = 1/3, P[X = 1] = P[X = 2] = 1/6, P[X = 3] = 1/3$.

- a) Berechnen Sie $E[X]$ - geben Sie auch den Median an.
- b) Berechnen Sie $V[X]$ und $sd[X]$.
- c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion.
- d) Welches ist das kleinste a , sodass $P[X \leq a] \geq 0.75$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } E[X] &= 1.5 = \frac{1+2}{2}, \text{ Median ist auch } 1.5 \text{ (da symmetrische Verteilung)} \\ \text{b) } V[X] &= \frac{19}{12} = 1.5833, \quad sd[X] = \sqrt{19/12} = 1.2583 \\ \text{c) } F(a) &= 0 \text{ falls } a < 0, \quad \frac{1}{3} \text{ falls } a \in [0, 1), \quad \frac{3}{6} \text{ falls } a \in [1, 2), \quad \frac{4}{6} \text{ falls } a \in [2, 3), \quad 1 \text{ falls } a > 3 \\ \text{d) } a &= 3 \end{aligned}$$

Rep-FS20 - Aufgabe 3:

Die Zufallsgrösse X habe Dichtefunktion $f(x) = Kx^2$ auf $[0, 4]$ und sei 0 sonst. Berechnen Sie:

- a) K .
- b) $E[X]$.
- c) Berechnen Sie $V[X]$ und $sd[X]$.
- d) den Median von X .
- e) $F_X(a)$.
- f) $P[X^2 \leq 9.5]$.

Lösung:

- a) $K = \frac{3}{64}$ b) $E[X] = 3$ c) $V[X] = \frac{3}{5}$, $sd[X] = \sqrt{3/5}$
- d) Median = $\sqrt[3]{32} = 3.1748$
- e) $F_X(a) = 0$ für $a < 0$, $\frac{1}{64}a^3$ für $0 \leq a \leq 4$, 1 für $a > 4$
- f) $F(\sqrt{9.5}) - 0 = 0.4575$

FS20 - Aufgabe 6a:

Die Zufallsgrösse X habe Dichtefunktion $f(x) = Kx$ auf $[3, 5]$ und sei 0 sonst.

- a) Berechnen Sie K .
- b) Berechnen Sie $E[X]$.
- c) Berechnen Sie $V[X]$.
- d) Berechnen Sie $P[X \in [3, 3.5]]$.

Lösung:

- a) $K = 0.125$ b) $E[X] = \frac{49}{12}$
- c) $V[X] = 17 - (49/12)^2 = \frac{47}{144}$
- d) $\int_3^{3.5} 0.125x \, dx = \frac{13}{64}$

FS20 - Aufgabe 6b:

Die Zufallsgrösse X habe Dichtefunktion $f(x) = Kx^2$ auf $[-2, 1]$ und sei 0 sonst.

- a) Berechnen Sie K .
- b) Berechnen Sie $E[X]$.
- c) Berechnen Sie $V[X]$.
- d) Berechnen Sie $P[X \in [0, 1.5]]$.

Lösung:

- a) $K = \frac{1}{3}$ b) $E[X] = -\frac{5}{4}$
- c) $V[X] = \frac{33}{15} - (-\frac{5}{4})^2 = \frac{51}{80}$
- d) $\int_0^1 \frac{1}{3}x^2 \, dx = \frac{1}{9}$

FS20 - Aufgabe 6c:

Die Zufallsgrösse X habe Dichtefunktion $f(x) = K(x-2)^2$ auf $[-2, 1]$ und sei 0 sonst.

- a) Berechnen Sie K .
- b) Berechnen Sie $E[X]$.
- c) Berechnen Sie $V[X]$.
- d) Berechnen Sie $P[X \in [0, 1.5]]$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } K &= \frac{1}{21} & \text{b) } E[X] &= -\frac{87}{84} \\ \text{c) } V[X] &= \frac{8}{5} - \left(-\frac{87}{84}\right)^2 = \frac{2067}{3920} \approx 0.5273 \\ \text{d) } \int_0^1 \frac{1}{21}(x-2)^2 dx &= \frac{7}{63} \end{aligned}$$

FS20 - Aufgabe 6d:

Die Zufallsgrösse X habe Dichtefunktion $f(x) = K|x+1|$ auf $[-2, 1]$ und sei 0 sonst.

- a) Berechnen Sie K .
- b) Berechnen Sie $E[X]$.
- c) Berechnen Sie $V[X]$.
- d) Berechnen Sie $P[X \in [0, 1.5]]$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } K &= \frac{2}{5} & \text{b) } E[X] &= -\frac{1}{15} \\ \text{c) } V[X] &= \frac{5}{6} - \left(-\frac{1}{15}\right)^2 = \frac{373}{450} \approx 0.82889 \\ \text{d) } \int_0^1 \frac{2}{5}|x+1| dx &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

FS20 - Aufgabe 6e:

Die Zufallsgrösse X habe Dichtefunktion $f(x) = K(x^2 - x)$ auf $[0, 1]$ und sei 0 sonst.

- a) Berechnen Sie K .
- b) Berechnen Sie $E[X]$.
- c) Berechnen Sie $V[X]$.
- d) Berechnen Sie $P[X \in [0.5, 1.5]]$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } K &= -6 & \text{b) } E[X] &= \frac{1}{2} \\ \text{c) } V[X] &= \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20} \\ \text{d) } \int_{0.5}^1 -6(x^2 - x) dx &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Rep-FS19 - Aufgabe 3:

Die Zufallsgrösse X habe Wahrscheinlichkeitsfunktion $P[X = 0] = 0.2, P[X = 1] = 0.3, P[X = 2] = 0.3$ und $P[X = 3] = 0.2$. Berechnen Sie

- a) $E[X]$.
- b) $V[X]$ und $sd[X]$.
- c) $F_X(a)$
- d) $P[X^2 \leq 8.5]$.

Lösung:

$$\text{a) } E[X] = 1.5 \quad \text{b) } V[X] = 1.05, \quad sd[X] \approx 1.0247$$

$$\text{c) } F_X(a) = \begin{cases} 0 & a < 0 \\ 0.2 & a \in [0, 1) \\ 0.5 & a \in [1, 2) \\ 0.8 & a \in [2, 3) \\ 1.0 & 3 \leq a \end{cases} \quad \text{d) } 0.8$$

FS19 - Aufgabe 3:

Die Zufallsgrösse X habe Dichtefunktion $f(x) = Kx^3$ auf $[0, 2]$ und sei 0 sonst.

- a) Berechnen Sie K .
- b) Berechnen Sie $E[X]$.
- c) Berechnen Sie $V[X]$ und $sd[X]$.
- d) Berechnen Sie $P[X \in [1, 1.5]]$.

Lösung:

$$\text{a) } K = 1/4 \quad \text{b) } E[X] = 8/5$$

$$\text{c) } V[X] = 8/75, \quad sd[X] = \sqrt{8/75} \approx 0.33 \quad \text{d) } 65/256$$

Rep-FS18 - Aufgabe 3:

X habe auf $[0, 10]$ Dichte $f(x) = Kx$ mit $K > 0$ und sei sonst 0.

- a) Berechnen Sie K .
- b) Berechnen Sie den Erwartungswert und den Median.
- c) Berechnen Sie die Varianz und Standardabweichung
- d) Was ist der Median von $X^2 + 1$?

Lösung:

$$\text{a) } K = \frac{1}{50} \quad \text{b) } E(X) = 6.6\bar{6}, \quad \text{Median} = \sqrt{50}$$

$$\text{c) } V(X) = 5.\bar{5}, \quad sd(X) = \sqrt{5.\bar{5}} \quad \text{d) } \text{Median von } (X^2 + 1) = 51$$

FS18 - Aufgabe 3:

Die Zufallsgrösse X habe Verteilung: $P[X = -1] = 0.1, P[X = 1] = 0.1, P[X = 2] = 0.5$ und $P[X = 5] = 0.3$.

- a) Berechnen Sie $E[X]$.
- b) Berechnen Sie $V[X]$ und $sd[X]$.
- c) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X^2 ?
- d) Berechnen Sie $P[e^X \in [7, 8]]$.

Lösung:

- a) $E[X] = 2.5$ b) $V[X] = 3.45, sd[X] \approx 1.857$
 c) $E[X^2] = 9.7, V[X^2] = 101.61$ d) 0.5

Rep-FS17 - Aufgabe 3:

X nehme folgende Werte mit folgenden Wahrscheinlichkeiten an:

$$P[X = 0] = 0.2, P[X = 2] = 0.2, P[X = 4] = 0.2, P[X = 6] = 0.4.$$

- a) Berechnen sie den Erwartungswert und den Median.
- b) Berechnen Sie Varianz und Standardabweichung.
- c) Was ist der Median von $\sqrt{X} - 1$?
- d) Geben Sie die Verteilung von $X^2 + 2$ in einer Tabelle an.

Lösung:

a) $E = 3.6, \text{Median} = 4$

b) $V = 5.44, sd = 2.33$

c) Median = 1

d)

$\frac{x_i^2 + 2}{p_i}$	2	6	18	38
	0.2	0.2	0.2	0.4

FS17 - Aufgabe 3:

Sei X eine Zufallsgrösse mit folgender Verteilung: $P[X = 0] = 0.3, P[X = 1] = 0.3, P[X = 2] = 0.3, P[X = 3] = 0.1$.

- a) Berechnen Sie $E[X]$.
- b) Berechnen Sie $V[X]$ und $sd[X]$.
- c) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von $X + 1$.
- d) Berechnen Sie die Varianz von X^2 .

Lösung:

a) $E[X] = 1.2$

b) $V[X] = 0.96, sd[X] = 0.9798$

c) $E[X + 1] = 2.2, V[X + 1] = 0.96$

d) $V[X^2] = 7.44$

Rep-FS16 - Aufgabe 3:

Sei X eine Zufallsgrösse mit Dichte $f(x)$. Die Dichte ist lediglich auf $[0, 10]$ ungleich Null. Dort hat sie die Form $f(x) = Kx + c$, wo K und c je streng grösser 0 sind.

a) Welcher Zusammenhang muss zwischen K und c gelten?

In den jetzt folgenden Teilaufgaben können Sie einen Ausdruck in K und c stehen lassen.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X .

c) Wie gross ist $P[X \leq 5]$?

d) Wie sind Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von X ?

e) Berechnen Sie auch den Median von X .

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } 50K + 10c = 1 \quad \text{b) } F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ K/2x^2 + cx & 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & 10 < x \end{cases} \quad \text{c) } 12.5K + 5c \\ \text{d) } \mu = 333.\bar{3}K + 50c, \sigma^2 = 2500K + 333.\bar{3}c - \mu^2, \sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad \text{e) Median} = \frac{-c + \sqrt{c^2 + K}}{K} \end{aligned}$$

FS16 - Aufgabe 3:

Sei X die Augenzahl eines fairen Würfels und Y eine davon unabhängige Zufallsgrösse mit folgender Verteilung: $P[Y = 0] = 0.25, P[Y = 1] = 0.5, P[Y = 2] = 0.25$.

1.) Wie ist $E[X + Y]$?

2.) Wie ist $V[X + Y]$?

3.) Berechnen Sie $P[X + Y = 8]$.

4.) Wie gross ist $P[X + Y \leq 2]$?

Lösung:

$$1) 4.5 \quad 2) V[X + Y] \approx 2.917 + 0.5 = 3.417 \quad 3) \frac{1}{24} \quad 4) \frac{1}{6}$$

Rep-FS15 - Aufgabe 3:

Sei X eine Zufallsgrösse mit Dichte $f(x)$. Die Dichte ist lediglich auf $[0, 10]$ ungleich Null, auf dem Intervall $[0, 5]$ konstant und auf $(5, 10]$ ebenfalls konstant. Von 0 bis 5 ist die Dichte halb so gross wie ab 5 bis 10.

a) Geben Sie die Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion vollständig an.

b) Wie sind Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von X ?

c) Wie gross ist $P[X \in [4, 7]]$?

d) Berechnen Sie den Median von X .

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2/30 & x \in [0, 5] \\ 4/30 & x \in (5, 10] \\ 0 & x > 10 \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/15 & x \in [0, 5] \\ (2x - 5)/15 & x \in (5, 10] \\ 1 & x > 10 \end{cases} \\ \text{b) } E(X) = \frac{175}{3}, V(X) = 7.63\bar{8}, \text{sd}(X) = 2.764 \quad \text{c) } 1/3 \quad \text{d) } 6.25 \end{aligned}$$

FS15 - Aufgabe 3:

X und Y seien je die Augenzahlen von unabhängigen Würfeln mit fairen Würfeln (also total 2 faire Würfel).

- 1.) Wie ist $E[X + Y]$?
- 2.) Wie ist $V[X + Y]$?
- 3.) Wie ist die Verteilung von $X + Y$? Geben Sie dazu eine Tabelle an.
- 4.) Wie gross ist $P[X + Y \leq 10]$?

Lösung:1.) 7 2.) $\frac{35}{6} \approx 5.8\bar{3}$ 3.)

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X+Y=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

4.) $\frac{11}{12}$ **Rep-FS14 - Aufgabe 2:**

Sie geben in R den Befehl $(\text{rbinom}(1, 2, 0.5) - 1)^2$ ein. Welche theoretische Verteilung hat diese Realisation?

Lösung:

Be(0.5)

Rep-FS14 - Aufgabe 3:

Sei X eine Zufallsgrösse mit folgender Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P[X = 0] = 0.5, P[X = 1] = 0.3, P[X = 2] = 0.1, P[X = 3] = 0.1.$$

- a) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von X .
- b) Wie sind Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von X ?
- c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $Y := \frac{1}{X+1}$ an.
- d) Berechnen Sie $E[Y]$.

Lösung:a) siehe Musterlösung b) $E[X] = 0.8, V[X] = 0.96, sd[X] = 0.9798$ c) $P[Y = 1] = 0.5, P[Y = 1/2] = 0.3, P[Y = 1/3] = 0.1, P[Y = 1/4] = 0.1$ d) $E[Y] = 0.708\bar{3}$ **FS14 - Aufgabe 3:**

X sei $\text{Bin}(5, 0.5)$ -verteilt. Sei $Y := X + 1$. Der Rest der Aufgabe dreht sich um ebendieses Y .

- 1.) Geben Sie die Wertetabelle für Y an und Skizzieren Sie auch den Graph der Wahrscheinlichkeitsfunktion.
- 2.) Berechnen Sie $E[Y], V[Y]$ und die Standardabweichung.
- 3.) Berechnen Sie $P[Y \leq 5]$.
- 4.) Wie lautet der R-Befehl, wenn Sie eine 10er Stichprobe von Y haben wollen?

Lösung:

1.)	$\frac{y_i}{p_i}$	1	2	3	4	5	6
		0.03125	0.15625	0.3125	0.3125	0.15625	0.03125

2.) $E(Y) = 3.5, V(Y) = 1.25, SA(Y) = 1.118034$ 3.) 0.96875 4.) $\text{rbinom}(10, 5, 0.5) + 1$

Rep-FS13 - Aufgabe 3:

Eine Zufallsgrösse X habe auf dem Intervall $[-1, 3]$ die Dichtefunktion $K|x|$ mit einer Normierungskonstanten $K > 0$. Ausserhalb sei die Dichte 0.

- Geben Sie die Verteilungsfunktion genau an und machen Sie dazu eine präzise, vollständige Skizze.
- Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$.
- Berechnen Sie $E[X^2]$.
- Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung dieser Zufallsgrösse.
- Wie gross ist $P[X \in [2, 5]]$?

Lösung:

$$\text{a) } (K = 1/5) \rightarrow F_X(a) = \begin{cases} 0, & a < -1 \\ (1 - a^2)/10 & -1 \leq a < 0 \\ (a^2 + 1)/10 & 0 \leq a < 3 \\ 1, & 3 \leq a \end{cases} \quad \text{b) } E(X) = 26/15$$

$$\text{c) } E(X^2) = 82/20 \quad \text{d) } V(X) = 1.0956, SA(X) = 1.0467 \quad \text{e) } P(2 \leq X \leq 5) = 0.5$$

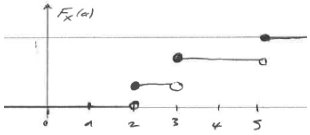
FS13 - Aufgabe 3:

Eine Zufallsgrösse X nehme die folgenden 3 Werte mit folgenden Wahrscheinlichkeiten an (mit $p(n) := P[X = n]$): $p(2) = 0.3, p(3) = 0.4, p(5) = 0.3$.

- (1 Punkt) Geben Sie die Verteilungsfunktion genau an und machen Sie dazu eine präzise, vollständige Skizze.
- Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$.
- Berechnen Sie $E[X^2]$.
- Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung dieser Zufallsgrösse.

Lösung:

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & a < 2 \\ 0.3 & a \in [2, 3) \\ 0.7 & a \in [3, 5) \\ 1 & a \geq 5 \end{cases}$$

1.) 

2.) $E(X) = 3.3$ 3.) $E(X^2) = 12.3$ 4.) $V(X) = 1.41, sd(X) = 1.187$

Rep-FS12 - Aufgabe 3:

Eine Zufallsgrösse X nehme die folgenden fünf Werte $\{0, 1, 3, 7, 12\}$ mit Wahrscheinlichkeiten $P[X = 0] = 0.2, P[X = 1] = 0.2, P[X = 3] = 0.2, P[X = 7] = 0.3, P[X = 12] = 0.1$ an.

- 1.) Geben Sie die Verteilungsfunktion genau an und machen Sie dazu eine präzise, vollständige Skizze.
- 2.) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$.
- 3.) Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung dieser Zufallsgrösse.
- 4.) Berechnen Sie $E[\sqrt{X}]$.

Lösung:

$$1.) F_X(a) = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ 0.2, & 0 \leq a < 1 \\ 0.4, & 1 \leq a < 3 \\ 0.6, & 3 \leq a < 7 \\ 0.9, & 7 \leq a < 12 \\ 1, & 12 \leq a \end{cases} \quad 2.) E(X) = 4.1 \quad 3.) V(X) = 14.29, SA(X) = 3.78 \quad 4.) E(\sqrt{X}) \approx 1.686$$

FS12 - Aufgabe 3:

Eine Zufallsgrösse X habe Dichte Kx auf $[0,5]$ und sei 0 sonst.

- a) Berechnen Sie K .
- b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an; machen Sie dazu auch eine exakte Skizze.
- c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$ und den Median.
- d) Berechnen Sie die Varianz und Standardabweichung dieser Zufallsgrösse.
- e) Berechnen Sie $P[X > -1.5]$ und $P[X > 4]$.

Lösung:

$$a) 2/25 \quad b) F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{25}, & 0 \leq x \leq 5 \\ 1, & 5 < x \end{cases} \quad c) E(X) = 10/3, \text{ Median} = \sqrt{25/2} \approx 3.5356$$

$$d) V(X) = \frac{2}{25} \cdot \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^5 - \frac{100}{9} \approx 1.389, sd(X) \approx 1.179 \quad e) P[X > -1.5] = 1, P[X > 4] = 9/25$$

Rep-FS11 - Aufgabe 3:

Eine Zufallsgrösse X nehme die folgenden drei Werte $\{0, 1, 2\}$ mit Wahrscheinlichkeiten $P[X = 0] = 0.25, P[X = 1] = 0.5, P[X = 2] = 0.25$ an.

- a) Geben Sie die Verteilungsfunktion genau an und machen Sie dazu eine präzise, vollständige Skizze.
- b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$.
- c) Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung dieser Zufallsgrösse.
- d) Berechnen Sie $E[X^3]$.

Lösung:

$$a) F_X(a) = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ 0.25, & 0 \leq a < 1 \\ 0.75, & 1 \leq a < 2 \\ 1, & 2 \leq a \end{cases} \quad b) E(X) = 1$$

$$c) V(X) = 0.5, sd(X) = \sqrt{0.5} \quad d) E(X^3) = 2.5$$

FS11 - Aufgabe 3:

Eine Zufallsgrösse X habe Dichte $K(3 - x)$ auf $[-3, 0]$ und sei 0 sonst.

- a) Berechnen Sie K .
- b) Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an; machen Sie dazu auch eine exakte Skizze.
- c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$.
- d) Berechnen Sie die Varianz dieser Zufallsgrösse.
- e) Berechnen Sie $P[X > -1.5]$.
- f) Geben Sie die Dichte von $|X|$ an. **Zusatz: Berechnen Sie den Median von X**

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2}{27} \quad \text{b) } F(a) &= \begin{cases} 0, & a \leq -3 \\ \frac{2}{27} \left(-\frac{a^2}{2} + 3a + 13.5 \right), & -3 \leq a \leq 0 \\ 1, & 0 \leq a \end{cases} \\ \text{c) } -\frac{5}{3} \quad \text{d) } \frac{13}{18} \quad \text{e) } F(0) - F(-1.5) &= 0.41\bar{6} \quad \text{Median} \approx -1.743 \end{aligned}$$

Rep-FS10 - Aufgabe 3:

Eine Zufallsgrösse X nehme nur Werte in der Menge $[0, 5]$ an und habe dort Dichtefunktion $f(x) = K(x + 1)$ mit einer Normierungskonstanten K .

- a) Berechnen Sie das K .
- b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X .
- c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$.
- d) Berechnen Sie die Varianz dieser Zufallsgrösse.
- e) Berechnen Sie $P[X > 1.5]$. **Zusatz: Berechnen Sie den Median von X**

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } K &= \frac{2}{35} \quad \text{b) } F(a) = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \frac{a(a+2)}{35}, & 0 \leq a \leq 5 \\ 1, & 5 < a \end{cases} \quad \text{c) } E[X] = 3.095 \\ \text{d) } 1.73 \quad \text{e) } P[X > 1.5] &= 1 - P[X \leq 1.5] = 1 - F(1.5) = 0.85 \quad \text{Median} \approx 3.3 \end{aligned}$$

FS10 - Aufgabe 3:

Eine Zufallsgrösse X nehme nur Werte in der Menge $\{0, 2, 4, 6\}$ an und zwar mit folgenden Wahrscheinlichkeiten: wo $p_i = P[X = i]$ sei $p_0 = 0.1, p_2 = 0.1, p_4 = 0.1$.

- Berechnen Sie p_6 .
- Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an; machen Sie dazu auch eine exakte Skizze.
- Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$.
- Berechnen Sie die Varianz dieser Zufallsgrösse.
- Berechnen Sie $P[X > 1.5]$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } p_6 &= 0.7 & \text{b) } F(a) &= \begin{cases} 0, & a < 0 \\ 0.1, & 0 \leq a < 2 \\ 0.2, & 2 \leq a < 4 \\ 0.3, & 4 \leq a < 6 \\ 1, & 6 \leq a \end{cases} \\ \text{c) } E(X) &= 4.8 & \text{d) } V(X) &= 27.2 - (4.8)^2 = 4.16 & \text{e) } 0.9 \end{aligned}$$

FS08 - Aufgabe 3:

Eine Zufallsgrösse X nehme nur Werte an aus der Menge $\{0, 5, 10\}$. Mit Wahrscheinlichkeit 0.5 nimmt X den Wert 5 an; die beiden anderen möglichen Werte sind gleichwahrscheinlich.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X .
- Geben Sie die Verteilungsfunktion von X an; machen Sie dazu auch eine Skizze.
- Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$. Geben Sie auch den Median an.
- Berechnen Sie die Varianz dieser Zufallsgrösse.
- Berechnen Sie $P[X^2 \in [20, 120]]$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } p_0 &= 0.25, p_5 = 0.5, p_{10} = 0.25 \\ \text{b) } F(a) &= \begin{cases} 0, & a < 0 \\ 0.25, & 0 \leq a < 5 \\ 0.75, & 5 \leq a < 10 \\ 1, & 10 \leq a \end{cases} & \text{c) } E(X) &= 5 \\ \text{d) } V(X) &= 37.5 - (5)^2 = 12.5 & \text{e) } 0.75 \end{aligned}$$

FS07 - Aufgabe 3:

Die berühmte Luchsinger-Zufallsgrösse X nimmt nur Werte in $\{1, 2, 3, 4\}$ an. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist $P[X = 1] = 0.1$, $P[X = 2] = 0.4$, $P[X = 3] = 0.4$, $P[X = 4] = 0.1$.

- Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsgrösse. Mit guter Begründung können Sie den Erwartungswert einfach angeben ohne konkrete Rechnung.
- Berechnen Sie die Varianz dieser Zufallsgrösse.
- Berechnen Sie die Verteilungsfunktion dieser Zufallsgrösse.
- Berechnen Sie $P[X \in [2, 5]]$.

Lösung:

$$\text{a) } E(X) = 2.5 \quad \text{b) } V(X) = 6.9 - (2.5)^2 = 0.65$$

$$\text{c) } F(a) = \begin{cases} 0, & a < 1 \\ 0.1, & 1 \leq a < 2 \\ 0.4, & 2 \leq a < 3 \\ 0.9, & 3 \leq a < 4 \\ 1, & 4 \leq a \end{cases} \quad \text{d) } 0.9$$

Probe-FS07 - Aufgabe 3:

Die berühmte Luchsinger-Zufallsgrösse Z nimmt nur Werte auf dem Intervall $[1, 2]$ an.

Die Dichte ist dort $f(x) = K(2 - x)$, mit einer Normierungskonstanten K .

- Berechnen Sie K .
- Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsgrösse
- Berechnen Sie die Varianz dieser Zufallsgrösse.
- Berechnen Sie die Verteilungsfunktion dieser Zufallsgrösse.
- Berechnen Sie $P[Z \in [1.5, 5]]$.

Lösung:

$$\text{a) } K = 2 \quad \text{b) } 4/3 \quad \text{c) } 1/18$$

$$\text{d) } F_Z(a) = \begin{cases} 0, & a < 1 \\ 4a - a^2 - 3, & 1 \leq a \leq 2 \\ 1, & 2 < a \end{cases} \quad \text{e) } 0.25$$

FS06 - Aufgabe 3:

Die berühmte Luchsinger-Zufallsgrösse Z nimmt nur Werte auf dem Intervall $[0,2]$ an.

Die Dichte ist dort $f(x) = Kx^3$, mit einer Normierungskonstanten K .

- a) Berechnen Sie K .
- b) Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsgrösse.
- c) Berechnen Sie die Varianz dieser Zufallsgrösse.
- d) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion dieser Zufallsgrösse.
- e) Berechnen Sie $P[Z \in [1.5, 5]]$.

Lösung:

$$\text{a) } K = 0.25 \quad \text{b) } E(X) = \frac{32}{20} = 1.6 \quad \text{c) } V(X) = \frac{8}{3} - (1.6)^2 = \frac{8}{75} \approx 0.10667$$

$$\text{d) } F(a) = \begin{cases} 0, & a < 0 \\ \frac{a^4}{16}, & 0 \leq a < 2 \\ 1, & 2 \leq a \end{cases}$$

$$\text{d) } 1 - \frac{(1.5)^4}{16} \approx 0.68$$