MAT183 PVK

Vorzeigeaufgaben

Kombinatorik

Vorzeigeaufgaben - Anzahl Möglichkeiten $\binom{n}{k}$

Vorzeigeaufgabe: **Übungen FS20 Serie 2 Aufgabe 1:**

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es in den folgenden Situationen?

a) Aus einer Gruppe von 5 Mathematikern und 7 Physikern soll ein Vorstand bestehend aus 2 Mathematikern und 3 Physikern gewählt werden.

b) Bei einem feierlichen Essen muss man jeweils eine Vorspeise (Suppe oder Salat), eine Hauptspeise (Rind, Poulet, Fisch oder Tofu), eine Beilage (Reis, Nudeln oder Saisongemüse) sowie ein Dessert (Apfelkuchen oder Mousse au Chocolat) wählen. Wie viele verschiedene 4-Gang-Menüs können gewählt werden?

c) In einer Restaurantküche stehen für einen Salatteller folgende Sorten zur Auswahl: Kopfsalat, Chicoré, Nüssli oder Eisberg. Wie viele verschiedene (nicht leere) Salatteller können serviert werden?

d) Auf wie viele Arten können beim Lotto aus 42 Zahlen 6 gezogen werden?

Lösung: a) $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = 350$ b) $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ c) $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 15$ d) $\binom{42}{6} = 5'245'786$

Vorzeigeaufgabe: **Storrer Kapitel 35 Aufgabe 14:**

In einer Schachtel hat es 8 rote und 4 blaue Farbstifte. Ich nehme mit einem Griff drei Farbstifte heraus. Gesucht ist die W'keit für folgende Eregnisse: a) Genau einer der Farbstifte ist rot, b) mindestens ein Farbstift ist blau.

Lösung: a) $\frac{\binom{8}{1}\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{48}{220} = \frac{12}{55} \approx 0.2182$ b) $1 - \frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{41}{55} \approx 0.7455$

Vorzeigeaufgaben - Anzahl Anordnungen / Permutationen !

Vorzeigeaufgabe: **Eigenkreation:**

Wie viele unterscheidbare "Wörter" (muss keinen Sinn ergeben) kann man mit den folgenden Buchstaben bilden: ABAPSEAPAP

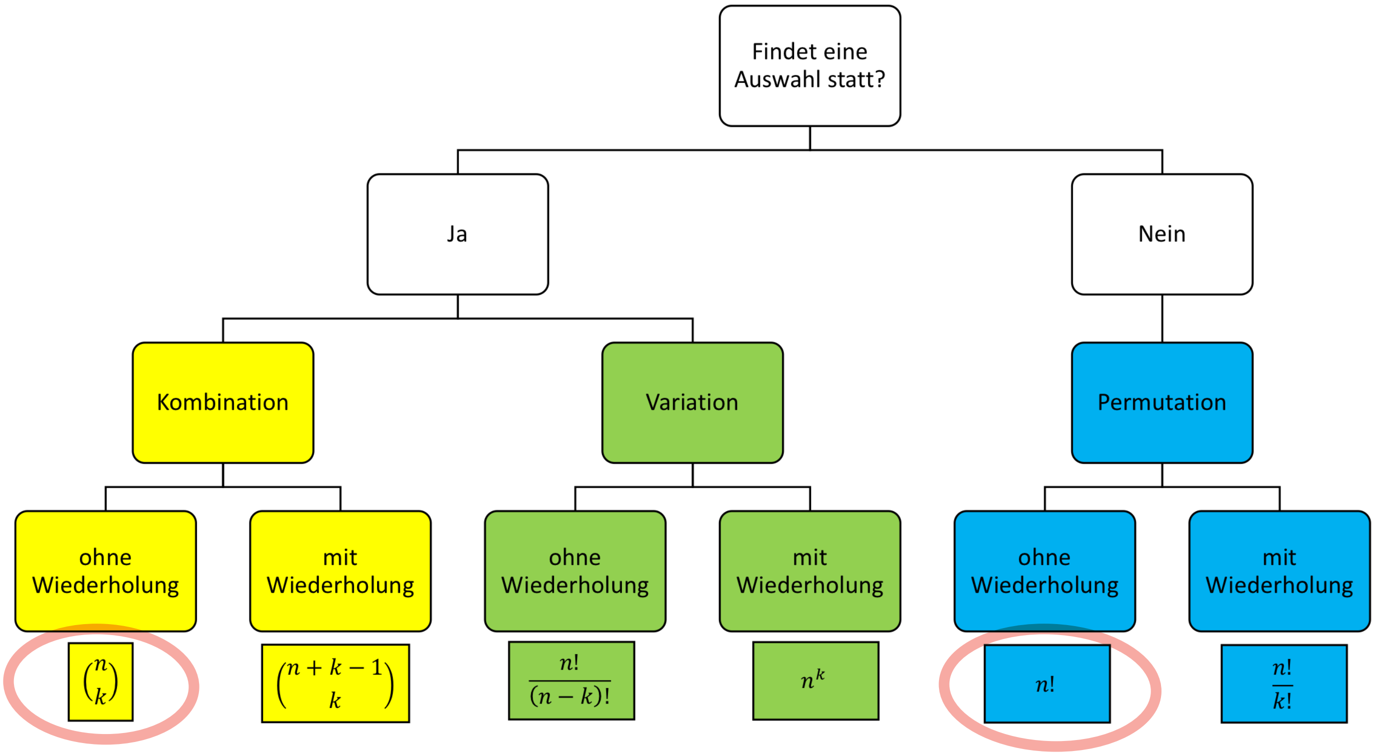
Lösung: $\frac{10!}{4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 1!}$

Vorzeigeaufgabe: **Übungen FS20 Serie 2 Aufgabe 4:**

Ein Zutrittsystem verwendet einen PIN Code der Länge 4 (mit Ziffern von $0 - 9$). Die Eingabetastatur wurde von Verbrechern so manipuliert, dass diese danach wissen, dass (mindestens) die Ziffern 2, 4 und 7 mindestens einmal je gedrückt wurden. (Stellen Sie sich zum Beispiel dazu vor, die Fingerabdrücke werden auf den Ziffern 2, 4 und 7 gefunden: dann muss man jede dieser 3 Ziffern mindestens einmal gedrückt haben. Die anderen Ziffern konnten die Verbrecher nicht manipulieren.)

Die Verbrecher wollen nun auf die Anzahl PIN codes schliessen, die es geben kann, wenn 2, 4 und 7 je mindestens einmal vorkommen müssen.

Lösung: $(10)^4 - (3 \cdot 9^4 - 3 \cdot 8^4 + 1 \cdot 7^4) = 204$ $(= 4 \cdot 3! \cdot 7 + \frac{4 \cdot 3!}{2!} \cdot 3)$



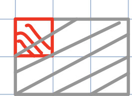
Anzahl Möglichkeiten, k Objekte anzuordnen:

$$k! = k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = k\cdot(k-1)! = k\cdot(k-1)\cdot(k-2)! \quad \text{etc.}$$

Anzahl verschiedene Möglichkeiten, k Objekte aus n auszuwählen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$$

Wofür: oft um W'keiten zu berechnen:

- klassische W'keit: $p = \frac{\text{Anzahl Günstige Fälle}}{\text{Anzahl Mögliche Fälle}} = \frac{G}{M}$
- geom. W'keit: $p = \frac{\text{Günstige Fläche}}{\text{Mögliche Fläche}}$ Bsp.  $p = \frac{1}{6}$
- LLN / ideal. rel. Häufigkeit: $\hat{p} = \frac{k}{n}$ $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

Vorzeigeaufgabe: **Übungen FS20 Serie 2 Aufgabe 1:**

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es in den folgenden Situationen?

a) Aus einer Gruppe von 5 Mathematikern und 7 Physikern soll ein Vorstand bestehend aus 2 Mathematikern und 3 Physikern gewählt werden.

b) Bei einem feierlichen Essen muss man jeweils eine Vorspeise (Suppe oder Salat), eine Hauptspeise (Rind, Poulet, Fisch oder Tofu), eine Beilage (Reis, Nudeln oder Saisongemüse) sowie ein Dessert (Apfelkuchen oder Mousse au Chocolat) wählen. Wie viele verschiedene 4-Gang-Menüs können gewählt werden?

c) In einer Restaurantküche stehen für einen Salatteller folgende Sorten zur Auswahl: Kopfsalat, Chicoré, Nüssli oder Eisberg. Wie viele verschiedene (nicht leere) Salatteller können serviert werden?

d) Auf wie viele Arten können beim Lotto aus 42 Zahlen 6 gezogen werden?

a) Anzahl verschiedene Möglichkeiten, k Objekte aus n auszuwählen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

Aus $n=5$ Mathematikern, $k=2$ auswählen: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

Aus $n=7$ Physikern, $k=3$ auswählen: $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

Anzahl Möglichkeiten 2 Math. und 3 Phys. auszuwählen:

$\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = 10 \cdot 35 = 350$ verschiedene mögliche Vorstände

b) $k=1$ von $n=2$ Vorspeisen $\longrightarrow \binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = \frac{2}{1} = 2$

$k=1$ von $n=4$ Hauptspeisen $\longrightarrow \binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{4}{1} = 4$

$k=1$ von $n=3$ Beilagen $\longrightarrow \binom{3}{1} = 3$

$k=1$ von $n=2$ Desserts $\longrightarrow \binom{2}{1} = 2$

$\Longrightarrow \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ verschiedene 4-Gang-Menüs mögl.

c) In einer Restaurantküche stehen für einen Salatteller folgende Sorten zur Auswahl: Kopfsalat, Chicoré, Nüssli oder Eisberg. Wie viele verschiedene (nicht leere) Salatteller können serviert werden?

d) Auf wie viele Arten können beim Lotto aus 42 Zahlen 6 gezogen werden?

$n = 4$ Salate $k > 0$ ausgewählt $\rightarrow k=1$ $\boxed{\text{oder}}$ $k=2$ $\boxed{\text{oder}}$ $k=3$ $\boxed{\text{oder}}$ $k=4$

$$\binom{4}{1} \boxed{+} \binom{4}{2} \boxed{+} \binom{4}{3} \boxed{+} \binom{4}{4} = 4 + \frac{4!}{2!\cdot 2!} + \frac{4!}{3!\cdot 1!} + \frac{4!}{4!\cdot 0!}$$

$$= 4 + \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} + \frac{4}{1} + \frac{4}{4}$$

$$= 4 + 6 + 4 + 1 = 15$$

$\Rightarrow$ 15 verschiedene (nicht leere) Salatteller möglich

d) $k=6$ aus $n=42$ auswählen:

$$\binom{42}{6} = \frac{42!}{6!\cdot 36!} \overset{TR}{=} 5'245'786$$

$$= \frac{42\cdot 41\cdot 40\cdot 39\cdot 38\cdot 37}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

Alte TR:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \overset{TR}{=} \underbrace{n \quad \boxed{nCr} \quad k}_{}$$

ev. direkt als Taste oder unter PRB-Taste

Bsp.: $8 \ nCr \ 2 = 28$

$7 \ nCr \ 3 = 35$

Neue TR: Ti-nspire $\longrightarrow$ siehe Playlist-Zusatzvideo

Vorzeigeaufgabe: **Storrer Kapitel 35 Aufgabe 14:**

In einer Schachtel hat es 8 rote und 4 blaue Farbstifte. Ich nehme mit einem Griff drei Farbstifte heraus. Gesucht ist die W'keit für folgende Eregnisse: a) Genau einer der Farbstifte ist rot, b) mindestens ein Farbstift ist blau.

Es hat $n=8$ bzw $n=4$ Objekte, davon zieht man $k=3$ heraus

a) P("genau 1 der 3 gezogenen ist rot")

$k=1$ roter von $n=8$ Roten und $k=2$ blaue von $n=4$ Blaue gezogen

$\binom{8}{1} \cdot \binom{4}{2} = 8 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 48$ Günstige Fälle

Anzahl Mögliche Fälle: $k=3$ aus $n=12$ ziehen: $\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$

Total

$\Rightarrow p = \frac{G}{M} = \frac{48}{220} = \frac{12}{55} \approx 0.2182$

b) P(mind. 1 Farbstift ist blau)

Gegenw'keit einfacher?

$= 1 - P($weniger als 1 Farbstift ist blau$)$

$= 1 - P($kein Farbstift ist blau$) = 1 - P($3 Rote und 0 Blaue$)$

$$= 1 - \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{12}{3}}$$

$$= 1 - \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1}{220} = \frac{220}{220} - \frac{56}{220} = \frac{41}{55} \approx 0.7455$$

Vorzeigeaufgabe: **Eigenkreation:**

Wie viele unterscheidbare "Wörter" (muss keinen Sinn ergeben) kann man mit den folgenden Buchstaben bilden: ABAPSEAPAP

Anzahl Möglichkeiten, k Objekte anzuordnen:

$$k! = k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = k\cdot(k-1)! = k\cdot(k-1)\cdot(k-2)! \quad \text{etc.}$$

Anzahl Möglichkeiten $k=10$ Buchstaben anordnen:

$$10!$$

unterscheidbar heisst doppelte Buchstaben zählen nicht doppelt

$\overset{\curvearrowright}{APA} = APA$ 2! nicht unterscheidbare Anordnungen/ "Tauschmöglichkeiten"

Wieviele doppelte Buchstaben:

A: 4-Mal $\longrightarrow$ $:4!$

B: 1-Mal $\longrightarrow$ $:1!$

E: 1-Mal $\longrightarrow$ $:1!$

P: 3-Mal $\longrightarrow$ $:3!$

S: 1-Mal $\longrightarrow$ $:1!$

$\Rightarrow$ Anzahl unterscheidbar "Wörter":

$$\frac{10!}{4!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 3!\cdot 1!} = \frac{10!}{4!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 28'600$$

Vorzeigeaufgabe: **Übungen FS20 Serie 2 Aufgabe 4:**

Ein Zutrittsystem verwendet einen PIN Code der Länge 4 (mit Ziffern von $0-9$). Die Eingabetastatur wurde von Verbrechern so manipuliert, dass diese danach wissen, dass (mindestens) die Ziffern 2, 4 und 7 mindestens einmal je gedrückt wurden. (Stellen Sie sich zum Beispiel dazu vor, die Fingerabdrücke werden auf den Ziffern 2, 4 und 7 gefunden: dann muss man jede dieser 3 Ziffern mindestens einmal gedrückt haben. Die anderen Ziffern konnten die Verbrecher nicht manipulieren.)

Die Verbrecher wollen nun auf die Anzahl PIN codes schliessen, die es geben kann, wenn 2, 4 und 7 je mindestens einmal vorkommen müssen.

mind. einmal ⟶ könnten auch mehrmals $\hat{=}$ 2-Mal vorkommen

↳ da $4-3=1$ "offene" Ziffer

Hilfs-Idee: W'keitsbaum:

4. Ziffer

2 | 4 | 7 | andere Zahl (1,3,5,6,8,9,0)

Äste $=$ $\binom{7}{1}$ Möglichkeiten

Anzahl Möglichkeiten

2,2,4,7 | 2,4,4,7 | 2,4,7,7 | 2,4,7, Neue

anzuordnen

$$= \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + 7 \cdot \frac{4!}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}$$

$$= 12 + 12 + 12 + 7 \cdot 24 = 204 \text{ mögliche Codes}$$