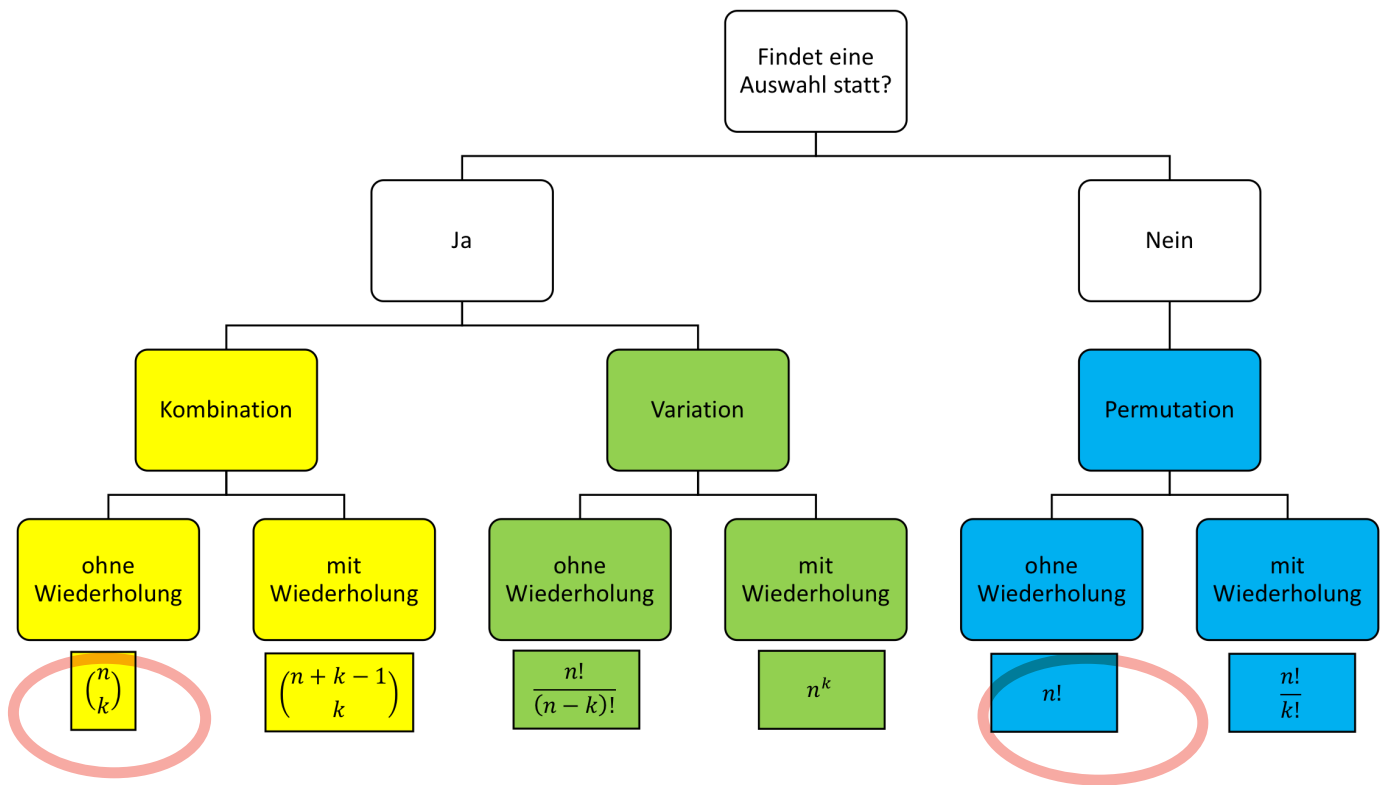




MAT183 PVK

Vorzeigeaufgaben

Kombinatorik



Anzahl Möglichkeiten, k Objekte anzuordnen:

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = k \cdot (k-1)! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2)! \quad \text{etc.}$$

Anzahl verschiedene Möglichkeiten, k Objekte aus n auszuwählen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}$$

Wofür: oft um W'keiten zu berechnen:

• klassische W'keit: $p = \frac{\text{Anzahl Günstige Fälle}}{\text{Anzahl Mögliche Fälle}} = \frac{G}{M}$

• geom. W'keit: $p = \frac{\text{Günstige Fläche}}{\text{Mögliche Fläche}}$ Bsp.  $p = \frac{1}{6}$

• LLN / ideal. rel. Häufigkeit: $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$
 $\hat{p} = \frac{k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p$

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es in den folgenden Situationen?

- Aus einer Gruppe von 5 Mathematikern und 7 Physikern soll ein Vorstand bestehend aus 2 Mathematikern und 3 Physikern gewählt werden.
- Bei einem feierlichen Essen muss man jeweils eine Vorspeise (Suppe oder Salat), eine Hauptspeise (Rind, Poulet, Fisch oder Tofu), eine Beilage (Reis, Nudeln oder Saisongemüse) sowie ein Dessert (Apfelkuchen oder Mousse au Chocolat) wählen. Wie viele verschiedene 4-Gang-Menüs können gewählt werden?
- In einer Restaurantküche stehen für einen Salatteller folgende Sorten zur Auswahl: Kopfsalat, Chicoré, Nüssli oder Eisberg. Wie viele verschiedene (nicht leere) Salatteller können serviert werden?
- Auf wie viele Arten können beim Lotto aus 42 Zahlen 6 gezogen werden?

a) Anzahl verschiedene Möglichkeiten, k Objekte aus n auszuwählen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}$$

Aus $n=5$ Mathematikern, $k=2$ auswählen: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

Aus $n=7$ Physikern, $k=3$ auswählen: $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

Anzahl Möglichkeiten 2 Math. und 3 Phys. auszuwählen:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{3} = 10 \cdot 35 = 350 \text{ verschiedene mögliche Vorstände}$$

b) $k=1$ von $n=2$ Vorspeisen $\rightarrow \binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = \frac{2}{1} = 2$

$k=1$ von $n=4$ Hauptspeisen $\rightarrow \binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{4}{1} = 4$

$k=1$ von $n=3$ Beilagen $\rightarrow \binom{3}{1} = 3$

$k=1$ von $n=2$ Desserts $\rightarrow \binom{2}{1} = 2$

$$\Rightarrow \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48 \text{ verschiedene 4-Gang-Menüs mögl.}$$

- c) In einer Restaurantküche stehen für einen Salatteller folgende Sorten zur Auswahl: Kopfsalat, Chicoré, Nüssli oder Eisberg. Wie viele verschiedene (nicht leere) Salatteller können serviert werden?
- d) Auf wie viele Arten können beim Lotto aus 42 Zahlen 6 gezogen werden?

$n=4$ Salate $k > 0$ ausgewählt $\rightarrow k=1$ oder $k=2$ oder $k=3$ oder $k=4$

$$\begin{aligned} \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} &= 4 + \frac{4!}{2! \cdot 2!} + \frac{4!}{3! \cdot 1!} + \frac{4!}{4! \cdot 0!} \\ &= 4 + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} + \frac{4}{1} + \frac{4}{4} \\ &= 4 + 6 + 4 + 1 = 15 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 15 verschiedene (nicht leere) Salatteller möglich

d) $k=6$ aus $n=42$ auswählen:

$$\begin{aligned} \binom{42}{6} &= \frac{42!}{6! \cdot 36!} \quad \text{TR} = 5'245'786 \\ &= \frac{42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \end{aligned}$$

Alte TR:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{TR} \quad \underbrace{n \quad nCr \quad k}$$

ev. direkt als Taste oder unter PRB-Taste

$$\begin{aligned} \text{Bsp.:} \quad 8 \quad nCr \quad 2 &= 28 \\ 7 \quad nCr \quad 3 &= 35 \end{aligned}$$

Neue TR: Ti-nspire $\rightarrow$ siehe Playlist-Zusatzvideo

Vorzeigaufgabe: Storrer Kapitel 35 Aufgabe 14:

In einer Schachtel hat es 8 rote und 4 blaue Farbstifte. Ich nehme mit einem Griff drei Farbstifte heraus. Gesucht ist die W'keit für folgende Ereignisse: a) Genau einer der Farbstifte ist rot, b) mindestens ein Farbstift ist blau.

Es hat $n=8$ bzw $n=4$ Objekte, davon zieht man $k=3$ heraus

a) $P(\text{"genau 1 der 3 gezogenen ist rot"})$

$k=1$ roter von $n=8$ Roten und $k=2$ blaue von $n=4$ Blaue gezogen

$$\binom{8}{1} \cdot \binom{4}{2} = 8 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 48 \quad \text{Günstige Fälle}$$

Anzahl Mögliche Fälle: $k=3$ aus $n=12$ ziehen: $\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$
Total

$$\Rightarrow p = \frac{G}{M} = \frac{48}{220} = \frac{12}{55} \approx 0.2182$$

b) $P(\text{mind. 1 Farbstift ist blau})$

→ Gegenw'keit einfacher?

$$= 1 - P(\text{weniger als 1 Farbstift ist blau})$$

$$= 1 - P(\text{kein Farbstift ist blau}) = 1 - P(3 Rote und 0 Blaue)$$

$$= 1 - \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{12}{3}}$$

$$= 1 - \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1}{220} = \frac{220}{220} - \frac{56}{220} = \frac{41}{55} \approx 0.7455$$

Vorzeigaufgabe:**Eigenkreation:**

Wie viele unterscheidbare "Wörter" (muss keinen Sinn ergeben) kann man mit den folgenden Buchstaben bilden:

ABAPSEAPAP

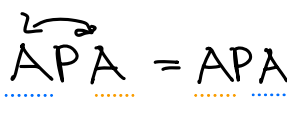
Anzahl Möglichkeiten, k Objekte anzuordnen:

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = k \cdot (k-1)! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2)! \quad \text{etc.}$$

Anzahl Möglichkeiten $k=10$ Buchstaben anordnen:

$$10!$$

unterscheidbar heisst doppelte Buchstaben zählen nicht doppelt

 $\overline{A} P \overline{A} = \overline{A} P \overline{A}$ 2! nicht unterscheidbare Anordnungen/"Tauschmöglichkeiten"

Wieviele doppelte Buchstaben:

$$A: 4\text{-Mal} \longrightarrow : 4!$$

$$B: 1\text{-Mal} \longrightarrow : 1!$$

$$E: 1\text{-Mal} \longrightarrow : 1!$$

$$P: 3\text{-Mal} \longrightarrow : 3!$$

$$S: 1\text{-Mal} \longrightarrow : 1!$$

$\Rightarrow$ Anzahl unterscheidbar "Wörter":

$$\frac{10!}{4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{10!}{4! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 28'600$$

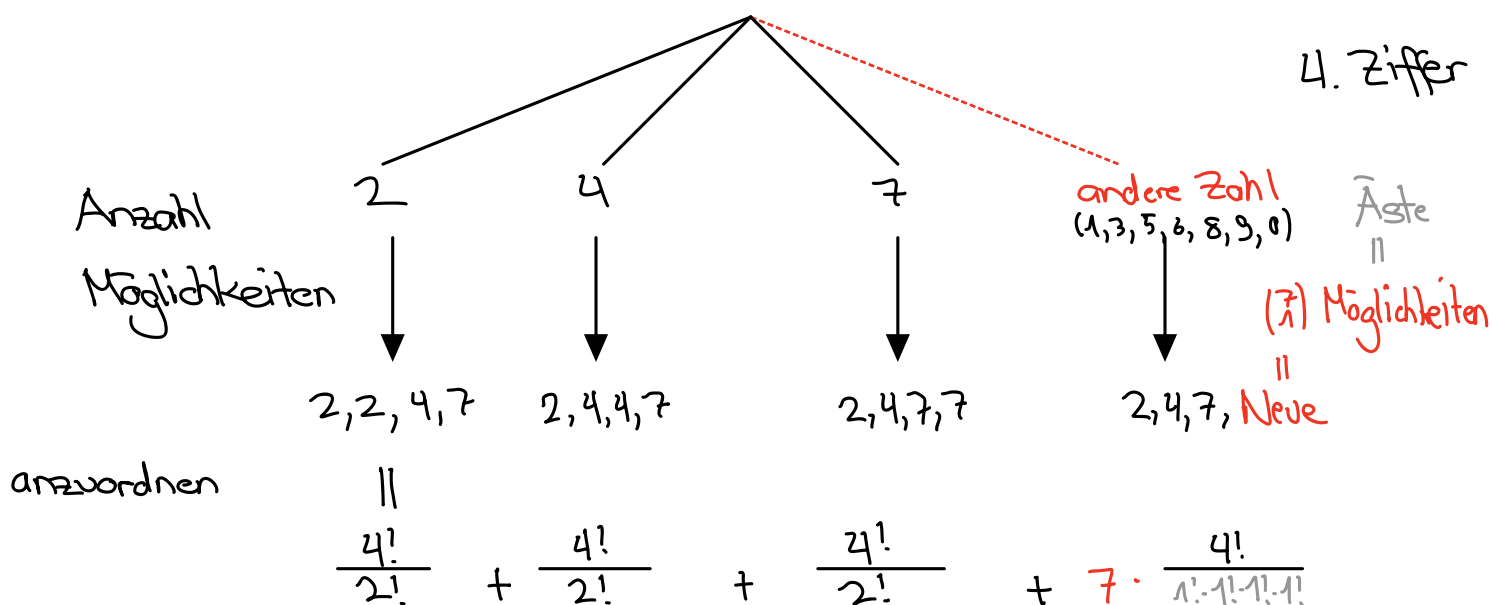
Vorzeigaufgabe: Übungen FS20 Serie 2 Aufgabe 4:

Ein Zutrittsystem verwendet einen PIN Code der Länge 4 (mit Ziffern von 0 – 9). Die Eingabetastatur wurde von Verbrechern so manipuliert, dass diese danach wissen, dass (mindestens) die Ziffern 2, 4 und 7 mindestens einmal je gedrückt wurden. (Stellen Sie sich zum Beispiel dazu vor, die Fingerabdrücke werden auf den Ziffern 2, 4 und 7 gefunden: dann muss man jede dieser 3 Ziffern mindestens einmal gedrückt haben. Die anderen Ziffern konnten die Verbrecher nicht manipulieren.)

Die Verbrecher wollen nun auf die Anzahl PIN codes schliessen, die es geben kann, wenn 2, 4 und 7 je mindestens einmal vorkommen müssen.

mind. einmal $\longrightarrow$ könnten auch mehrmals $\hat{=}$ 2-Mal vorkommen
↳ da $4-3=1$ "offene" Ziffer

Hilfs-Idee: W'keitsbaum:



$$= 12 + 12 + 12 + 7 \cdot 24 = 204 \text{ mögliche Codes}$$

Rep-FS23-Aufgabe 1b)

In einem Raum hat es 8 Lampen, welche unabhängig voneinander ein- und ausgeschaltet werden können. b1) Wie viele Beleuchtungsarten gibt es insgesamt? b2) Wie viele, wenn genau 5 Lampen brennen sollen?

Lösung:

$$\text{b1) } 2^8 \quad \text{b2) } \binom{8}{5} = 56$$

FS22-Aufgabe 1c)

Man schreibt jeden der 8 Buchstaben des Wortes PAPAGENO auf je eine von 8 gleich grossen Karten, mischt diese und zieht dann wahllos 4 Karten heraus, die man in der Reihenfolge ihres Erscheinens von links nach rechts nebeneinanderlegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass auf diese Weise das Wort PAPA entsteht.

Lösung:

$$\frac{2}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{420}$$

FS22-Aufgabe 1d)

Man schreibt jeden der 8 Buchstaben des Wortes SARASTRO auf je eine von 8 gleich grossen Karten, mischt diese und zieht dann wahllos 4 Karten heraus, die man in der Reihenfolge ihres Erscheinens von links nach rechts nebeneinanderlegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass auf diese Weise das Wort SARA entsteht.

Lösung:

$$\frac{2}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{210}$$

FS20-Aufgabe 3a.d)

In einer Schachtel hat es 24 Glühbirnen, wovon 6 kaputt sind. Sie nehmen nun 7 heraus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle funktionieren?

Lösung:

$$\frac{\binom{18}{7}}{\binom{24}{7}}$$

FS20-Aufgabe 3a.e)

In einer Schachtel hat es 24 Glühbirnen, wovon 8 kaputt sind. Sie nehmen nun 5 heraus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle funktionieren?

Lösung:

$$\frac{\binom{16}{5}}{\binom{24}{5}}$$

FS20-Aufgabe 3b.a) keine Kombinatorik-Aufgabe sondern "bekannte Verteilung"

In der Schweiz hat es 15 % Linkshänder. Sie haben eine Klasse von 25 Personen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es genau 7 Linkshänder hat?

Lösung:

$$\binom{25}{7} 0.15^7 0.85^{18}$$

Rep-FS15 - Aufgabe 1b)

Modelleisenbahnbauer Seppli hat sich eine Lokomotive, 3 Speisewagen, 2 Schlafwagen und 4 Personenwagen gekauft. Er will für seine Trudi einen Zug zusammenstellen. Die 3 Speisewagen, 2 Schlafwagen und 4 Personenwagen kann man weiter nicht mehr unterscheiden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, daraus einen Zug zusammenzustellen, wenn die Lokomotive an den Anfang gehört?

Lösung:

$$\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$$

Rep-FS15 - Aufgabe 1c)

In Aufgabe b) wird jetzt zusätzlich gefordert, dass die Wagen der gleichen Sorte direkt hintereinander gehängt werden müssen. Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt?

Lösung:

$$3! = 6$$