

MAT182 PVK

Kurstag 1

1-Minuten-Aufgaben:

”Kurvendiskussion”

&

Diverses

Übersicht:

Klassische Kurvendiskussion

Seite 2

Diverses

Seite 4

Log-Transformationen

Seite 8

Bei Fragen bitte zuerst auf der Prüfungsmemo-Seite entsprechende Sprachnachricht anhören

https://mathcourses.ch/MAT182/mat182_sprachnachrichten.html

(falls vorhanden) und daraufhin via WhatsApp nachfragen (wie immer inkl. Screenshot)

Danke! :-)

Klassische "Kurvendiskussion"

Rep-HS22 (Sept. 2023) - Aufgabe 1c)

Beschreiben Sie die Kurven, welche die Geradenschar $y = ax, a \in \mathbb{R}$, rechtwinklig schneiden. In Worten oder mit einer Formel.

Lösung:

Kreise (um den Ursprung); oder: $x^2 + y^2 = r^2$

Rep-HS19 (Aug. 2020) - Aufgabe 1g)

Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangente an die Funktion $f(x) = x^2 + 2$ an der Stelle $x = 1$

Lösung:

$t(x) = 2x + 1$ ($= 2 \cdot (x - 1) + 3$)

HS19 - Aufgabe 1h)

Wie muss man $a > 0$ wählen, damit sich die Graphen von e^{ax} und e^{-ax} in einem rechten Winkel schneiden?

Lösung:

$a = 1$ (damit $m_1 \cdot m_2 = -1$)

HS18 - Aufgabe 1e)

Ist die Funktion $f(x) = x^3$ im ganzen Intervall $[-1, 1]$ streng monoton wachsend?

Lösung:

Ja

Hinweis:

Eine ausführliche Erklärung zu den folgenden zwei Aufgaben findet ihr in der YouTube-Playlist oder direkt unter <https://www.youtube.com/watch?v=k5AF91ZWbze&list=PLDnzcUHgTuzkCDDY0JePhfbprKZqJ-BG4&index=6&t=3s>

HS14 - Aufgabe 1g)

Seppli untersucht die Funktion x^3 . Er leitet Sie ab und setzt die Ableitung gleich 0. Die Lösung der Gleichung ist dann 0. Er schliesst, dass x^3 bei $x = 0$ eine Extremalstelle hat. Kommentieren Sie sein Vorgehen.

Lösung:

$f' = 0$ ist notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für Extrema. $x = 0$ ist Sattelpunkt

HS14 - Aufgabe 1h)

Trudi untersucht die Funktion x^4 . Sie leitet Sie ab und setzt die Ableitung gleich 0. Die Lösung der Gleichung ist dann 0. Dann leitet sie nochmals ab und stellt leider fest, dass die Ableitung in 0 selber 0 ist. Trudi schliesst, dass x^4 bei 0 keine Extremalstelle hat. Kommentieren Sie ihr Vorgehen.

Lösung:

$f'' \neq 0$ ist hinreichende aber nicht notwendige Bedingung. $x = 0$ ist Minimum

Diverses

Rep-HS22 (Sept. 2023) - Aufgabe 1b)

Welchen Wert gibt e^0 ?

Lösung:

1

Rep-HS21 (Sept. 2022) - Aufgabe 1g)

Sie haben als Programmierer/In die Funktion $f(x) = x^2 e^{(x-2)^3} + 5$ verwendet. Dabei war x in Metern eingegeben. Dummerweise muss das Programm jetzt noch umgeschrieben werden, sodass man neu x in Zentimetern eingeben kann, aber die gleichen Funktionswerte wie vorhin entstehen. Schreiben Sie die neue Funktion auf.



Mühe / unklar wieso $x/100$ anstatt Mal 100? ↑ Memo ↑

Lösung:

$$(x/100)^2 e^{(x/100-2)^3} + 5$$

HS21 - Aufgabe 1k) (Version A)

Eine chemische Lösung habe pH-Wert von 9. Wie viele Wasserstoffionen hat es in 3 Litern dieser Lösung? Wie gross ist der pOH-Wert (wenn die Temperatur 22 Grad beträgt)?

Lösung:

$$3 \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-9} = 18.06 \cdot 10^{14}$$

pOH-Wert ist 5

HS20 - Aufgabe 1i) (Version A)

Im Gradmass: $\sin(30^\circ) = ?$; im Bogenmass: $\tan(\pi/4) = ?$

Lösung:

$$\sin(30^\circ) = 0.5 \quad \tan(\pi/4) = 1$$

HS20 - Aufgabe 1m) (Version A)

Eine Lösung habe pH-Wert von 6. Wie viele Wasserstoffionen hat es in 2 Litern dieser Lösung? Wie gross ist der pOH-Wert (wenn die Temperatur 22 Grad beträgt)?

Lösung:

$$2 \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-6} = 12.04 \cdot 10^{17} \quad \text{pOH-Wert ist 8}$$

HS18 - Aufgabe 1f)

Ist $|e - \pi| > 0.5$ oder $|e - \pi| \leq 0.5$ richtig?

Lösung:

$$|e - \pi| \leq 0.5$$

Rep-HS17 (Aug. 2018) - Aufgabe 1b)

Ein Prozess im Zeitablauf, $t \in \mathbb{R}$, wird durch $\sin(2t - 0.7)$ beschrieben, wo hier t in Sekunden und der Winkel in Gradmass angegeben ist. Wie sieht die Funktion aus, wenn Sie die Zeit in Stunden und den Winkel in Bogenmass angeben möchten?

Lösung:

$$\sin\left((7200t - 0.7) \cdot \frac{2\pi}{360}\right)$$

Rep-HS17 (Aug. 2018) - Aufgabe 1c)

Eine Strahlungsquelle emittiert im \mathbb{R}^3 Teilchen radial in alle Richtungen. Im Abstand von einem Meter wird die Anzahl Teilchen gemessen, welche pro Sekunde auf eine kleine Membran auftreffen. Jetzt wird eine 16 mal grössere Strahlungsquelle eingesetzt. Wie weit von der Quelle muss man die Messgeräte neu aufstellen, damit die gleiche Anzahl Teilchen pro Sekunde auf der Membran auftreffen? Vernachlässigen Sie allfällige Effekte von Wechselwirkungen.

Lösung:Neuer Radius / Entfernung: $4m$ **Rep-HS17 (Aug. 2018) - Aufgabe 1f)**

Geben Sie eine einzige Situation aus der Physik an, bei der f , f' und f'' eine konkrete Bedeutung haben und benennen Sie diese.

Lösung: $f(t)$ = zurückgelegte Strecke, $f'(t)$ = Geschwindigkeit, $f''(t)$ = Beschleunigung**HS17 - Aufgabe 1b)**

Geben Sie eine natürliche Zahl n an, für die

$$n^{(n^n)} = (n^n)^n = n^{n*n}.$$

Lösung: $n = 1$ (oder 0 oder 2)**HS17 - Aufgabe 1f)**

Ein Fahrzeug wird während eines Zeitintervalls $[0, T]$ beobachtet. Der zurückgelegte Weg zum Zeitpunkt t sei $s(t)$. Welchen Weg hätte das Fahrzeug zum Zeitpunkt T zurückgelegt, wenn es von einem bestimmten Moment $t_0 \in (0, T)$ an mit gleichbleibender Geschwindigkeit weitergefahren wäre? Einer der folgenden Ausdrücke ist richtig, welcher?

- A) $\dot{s}(t_0)T$
- B) $s(t_0)(T - t_0) + \dot{s}(t_0)$
- C) $\dot{s}(T)(T - t_0) + s(T)$
- D) $\dot{s}(t_0)(T - t_0) + s(t_0)$

Lösung:

D

Rep-HS16 (Sept. 2017) - Aufgabe 1d)

Ein chemischer Prozessablauf wird mit der Funktion $f(t) = 3t^2$ modelliert. Die Zeit t wird dabei anfänglich in Millisekunden angegeben. Wie sieht die Funktion aus, wenn wir die Zeit neu in Sekunden angeben wollen?

Lösung:

$$f_1(t) = 3 \cdot 10^6 t^2$$

Rep-HS15 (Sept. 2016) - Aufgabe 1e)

Eine Kugel wird derart vergrößert, dass sich das Volumen verachtfacht. Wie wächst dabei der Radius?

Lösung:

verdoppelt

HS15 - Aufgabe 1a)

Eine Fläche in der Ebene wird um den Faktor 2 gestreckt; wie ändert sich der Flächeninhalt? Ein Körper im Raum wird um den Faktor 3 gestreckt; wie ändert sich das Volumen?

Lösung:

Mal 4 und Mal 27

HS14 - Aufgabe 1d)

In der Vorlesung wurde definiert: "Der pH-Wert ist der negative dekadische Logarithmus der Konzentration der (freien) Wasserstoffionen in Mol pro Liter". Ein Mol definieren wir als $6.02 \cdot 10^{23}$. Wieviele (freie) Wasserstoffionen hat es dann in einem Liter Wasser, wenn der pH-Wert 7 ist? Wieviele, wenn der pH-Wert 5 ist?

Lösung:

$$6.02 \cdot 10^{16} \quad 6.02 \cdot 10^{18}$$

HS20 - Aufgabe 8: (Version A) [ev. hilft "Graphen \(Hilfe für Grenzwert Berechnung\)"-Video](#)

Geben Sie, falls vorhanden, die folgenden Limiten an. Sie können einfach die Zahlen hinschreiben oder wenn Sie glauben, ein Limes existiert gar nicht, schreiben Sie, dass der Limes nicht existiert.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} =$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x)e^x =$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x (|\sin(x)| + 0.1) =$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin(x) =$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \sin(x^{-1}) =$

Lösung:a) 0 b) $-\infty$ c) ∞ d) 0 e) 0

HS20 - Aufgabe 8: (Version B) [ev. hilft "Graphen \(Hilfe für Grenzwert Berechnung\)"-Video](#)

Geben Sie, falls vorhanden, die folgenden Limiten an. Sie können einfach die Zahlen hinschreiben oder wenn Sie glauben, ein Limes existiert gar nicht, schreiben Sie, dass der Limes nicht existiert.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x =$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x)e^{-x} =$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (|\cos(x)| + 0.1) =$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos(x) =$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \cos(x^{-1}) =$

Lösung:

a) 0 b) 0 c) 0 d) 0 e) 0

Rep-HS20 (Sept. 2021) - Aufgabe 7: [ev. hilft "Graphen \(Hilfe für Grenzwert Berechnung\)"-Video](#)

Geben Sie, falls vorhanden, die folgenden Limiten an. Sie können einfach die Zahlen hinschreiben oder wenn Sie glauben, ein Limes existiert gar nicht, schreiben Sie, dass der Limes nicht existiert.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2)e^{-x} =$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^3} (|\sin(x)| - 2) =$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-3} \sin(x^{-3}) =$ wo $x > 0$

Lösung:a) 0 b) 0 c) Grenzwert existiert nicht
(da $\sin(x^{-3})$ oszilliert)

Log-Transformationen (siehe Theorie-Erklärung auf nächster Seite / Lösungen)

Rep-HS14 (Sept. 2015) - Aufgabe 1h)

Der Zusammenhang zwischen den x -Werten und den y -Werten eines Datensatzes wird in einem doppeltlogarithmischen Masstab aufgezeichnet. Es ergibt sich eine Gerade. Wie ist der ursprüngliche Zusammenhang zwischen x und y ?

Lösung:

$$y = x^a \cdot e^b$$

HS14 - Aufgabe 1e)

Zweidimensionale Daten wurde je logarithmiert (doppelt-logarithmische Transformation). Mit $u := \ln x$ und $v := \ln y$ wurde dann nach einem bestimmten Verfahren eine Gerade angepasst; es ergab sich $v = 3u + 2$. Wie ist dann der explizite Zusammenhang zwischen x und y (Rücktransformation in der Form $y = \dots$)?

Lösung:

$$y = e^2 x^3$$

HS15 - Aufgabe 1f)

Bei zweidimensionalen Daten (x, y) wurden die y -Werte logarithmiert (einfach oder halb)-logarithmische Transformation). mit $v := \ln y$ wurde dann nach einem bestimmten Verfahren eine Gerade angepasst; es ergab sich $v = 3x + 2$. Wie ist dann der explizite Zusammenhang zwischen x und y (Rücktransformation in der Form $y = \dots$)?

Lösung:

$$y = e^{3x+2}$$

HS18 - Aufgabe 1g)

Bei einer Untersuchung stellt man fest, dass die Daten im Doppellogarithmischen Masstab auf der Geraden $y = 3x + 5$ liegen. Wie war der ursprüngliche Zusammenhang (bevor man transformiert hat)?

Lösung:

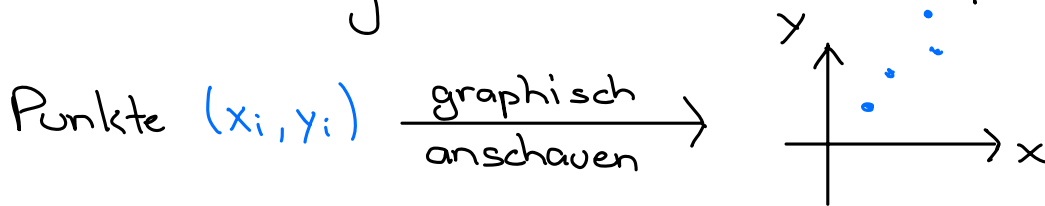
$$y = x^3 e^5$$

Log-Transformationen + möglicher x-y Zusammenhang

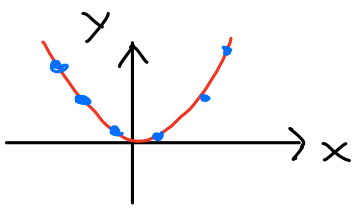
Datensatz mit Punkten $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$

Generell:

Zusammenhang zw. x und $y \Rightarrow$ Graph anschauen

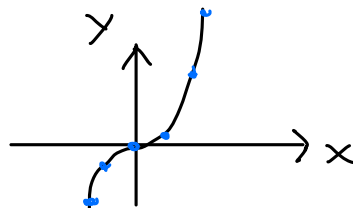


mögliche Zusammenhänge:



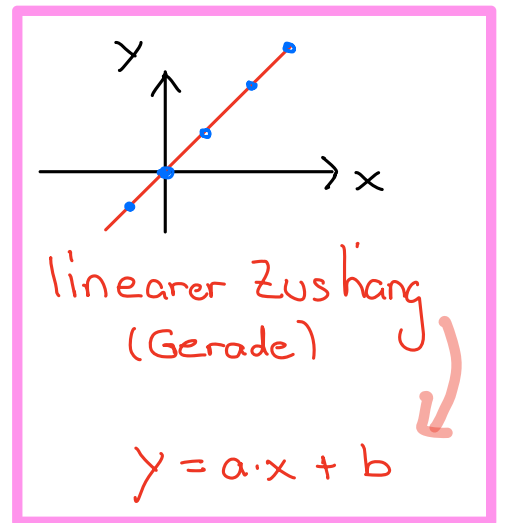
Quadratischer Zusammenhang
(Zw. x und y)

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$



kubischer Zusammenhang

$$y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$



linearer Zusammenhang
(Gerade)

$$y = a \cdot x + b$$

Gerade $\hat{=}$ linearer Zus'hän

Log-Transformation (der Daten)

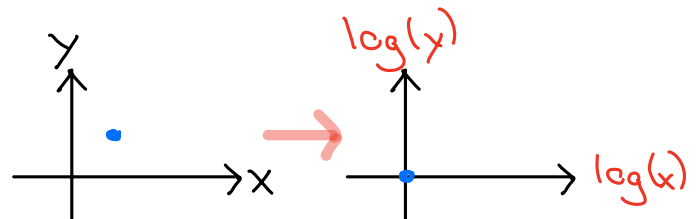
• Doppelt:

oft bei Mathe Dozenten

$$x \longrightarrow \log(x) \hat{=} \ln(x)$$

$$y \longrightarrow \log(y) \hat{=} \ln(y)$$

d.h.



• Einfach / halb: nur eine der beiden Vblen wird transformiert
(d.h. umgerechnet)

ursprünglichen x-y Zusammenhang ermitteln

① Zusammenhang im Text \rightarrow Gleichung

z.B. Gerade $\rightarrow y = a \cdot x + b$

② Ersetzen \rightarrow Transformierte Gleichung

— doppelt-logarithmiert: sowohl y mit $\ln(y)$
als auch x mit $\ln(x)$

— einfach logarithmiert: nur y mit $\ln(y)$
oder x mit $\ln(x)$

z.B. doppelt logarithmiert $\rightarrow \ln(y) = a \cdot \ln(x) + b$

③ Gleichung nach y auflösen

.....

Rep-HS14 - Aufgabe 1h)

Der Zusammenhang zwischen den x -Werten und den y -Werten eines Datensatzes wird in einem doppeltlogarithmischen Masstab aufgezeichnet. Es ergibt sich eine Gerade.

Wie ist der ursprüngliche Zusammenhang zwischen x und y ?

① Zusammenhang

$$y = a \cdot x + b$$

② Transformierte Gleichung

$$\ln(y) = a \cdot \ln(x) + b$$

③ nach y auflösen:

$$\underbrace{e^{\ln(y)}}_y = e^{a \cdot \ln(x) + b}$$

$$y = e^{\ln(x^a) + b}$$

$$y = \underline{e^{\ln(x^a)}} \cdot e^b$$

$$\underline{y = x^a \cdot e^b}$$

$$x \Rightarrow \log(x), \quad y \Rightarrow \log(y)$$

$\ln(y)$ links isoliert (alleine)
 $\hookrightarrow \exp(\) = \exp(\)$

3. log-Gesetz:

$$\underline{n \cdot \log(x) = \log(x^n)}$$

1. Potenzgesetz

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

Umkehrfrien heben sich auf

$$\underline{e^{\ln(a)} = \ln(e^a) = a} \quad *$$

Allg. Tipp:

Lös.weg rausschreiben:

①
②
③

HS14 - Aufgabe 1e)

Zweidimensionale Daten wurde je logarithmiert (doppelt-logarithmische Transformation).

Mit $u := \ln x$ und $v := \ln y$ wurde dann nach einem bestimmten Verfahren eine Gerade angepasst; es ergab sich $v = 3u + 2$.

Wie ist dann der explizite Zusammenhang zwischen x und y (Rücktransformation in der Form $y = \dots$)?

$$v = 3u + 2$$

$$u = \ln(x)$$

$$v = \ln(y)$$

$$\ln(y) = 3 \cdot \ln(x) + 2$$

nach y auflösen:

$\ln(y)$ links isoliert (alleine)

$\rightarrow \exp(\) = \exp(\)$

$$\underbrace{e^{\ln(y)}}_{y} = e^{\underline{3 \cdot \ln(x) + 2}}$$

3. log-Gesetz:

$$\underline{n \cdot \log(x) = \log(x^n)}$$

$$y = e^{\ln(x^3) + 2}$$

1. Potenzgesetz:

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

$$y = \underline{e^{\ln(x^3)}} \cdot e^2$$

Umkehrfnnen heben sich auf:

$$\underline{e^{\ln(a)} = \ln(e^a) = a} \quad \text{⊛}$$

$$\underline{\underline{y = x^3 \cdot e^2}}$$

HS15 - Aufgabe 1f)

Bei zweidimensionalen Daten (x, y) wurden die y -Werte logarithmiert (einfach oder halb)-logarithmische Transformation). Mit $v := \ln y$ wurde dann nach einem bestimmten Verfahren eine Gerade angepasst; es ergab sich $v = 3x + 2$.

Wie ist dann der explizite Zusammenhang zwischen x und y (Rücktransformation in der Form $y = \dots$)?

$$v = 3x + 2$$

$$\ln(y) = 3x + 2$$

$$\underline{\underline{y = e^{3x+2}}}$$

$$y = e^{3x+2}$$

$$y = e^{3x} \cdot e^2$$

$$= \underline{\underline{e^2 \cdot e^{3x}}}$$

$$= e^2 \cdot e^{3x}$$

Anfangswert (zur Zeit $x=0$)

$$v = \ln(y)$$

nach y auflösen:

$\ln(y)$ links isoliert (alleine)

$\hookrightarrow \exp(\) = \exp(\)$

Kann man nicht mehr weiter vereinfachen

(höchstens in die nicht nötige! Grundform von exp. Wachstum)

1. Potenzgesetz:
 $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$

$3 \hat{=} \lambda$ mit $\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}}$ — Halbwerts- oder Verdoppelungszeit
(hier Wachstum da $3 > 0$)