

MAT182 PVK

Kurstag 2

1-Minuten-Aufgaben:

DGL

Linearisieren / Approximieren

Exponentielles Wachstum

Übersicht:

Differentialgleichungen

Seite 2

Linearisieren / Approximieren

Seite 6

Exponentielles Wachstum

Seite 7

Bei Fragen bitte zuerst auf der Prüfungsmemo-Seite entsprechende Sprachnachricht anhören

https://mathcourses.ch/MAT182/mat182_sprachnachrichten.html

(falls vorhanden) und daraufhin via WhatsApp nachfragen (wie immer inkl. Screenshot)

Danke! :-)

Differentialgleichungen

HS22 - Aufgabe 1g) (Version A)

$y' = ay + b$ wurde in Kapitel 16 besprochen. Geben Sie ein konkretes Zahlenbeispiel mit konkreten Zahlen $a, b, y; a > 0, y \neq 0$; an, sodass y konstant in der Zeit ist. Sie müssen die Differentialgleichung nicht lösen. Erklären Sie in Worten, was dabei abläuft.

Lösung:

Bsp. $y = 8'000'000$ Einwohner; $a = 0.01, b = -80'000$
Wachstum wäre 1% pro Jahr, aber 80'000 wandern aus
→ Bevölkerung bleibt konstant

HS22 - Aufgabe 1i) (Version A)

Zeigen Sie, dass $y = x^4$ folgende Differentialgleichung löst:

$$y'' + (e^y)' - 12x^2 - 4e^{x^4}x^3 = 0.$$

Lösung:

$y' = 4x^3$ und $y'' = 12x^2$ einsetzen $\rightarrow 0 = 0$

HS21 - Aufgabe 1g) (Version A)

Zeigen Sie, dass $y = x^2$ folgende Differentialgleichung löst:

$$2y + y' - y''(x + x^2) + y''' = 0.$$

Lösung:

$y' = 2x, y'' = 2, y''' = 0$
 $\rightarrow 2x^2 + 2x - 2(x + x^2) + 0 = 0$

HS20 - Aufgabe 1c) (Version A)

Zeigen Sie, dass $y = x^3$ folgende Differentialgleichung löst:

$$3y - xy' + y'' - xy''' = 0.$$

Lösung:

$y' = 3x^2, y'' = 6x, y''' = 6$
 $\rightarrow 3x^3 - x \cdot 3x^2 + 6x - x \cdot 6 = 0$

Rep-HS19 (Aug. 2020) - Aufgabe 1c)

Geben Sie auf $x > 0$ ein Beispiel einer Funktion an, deren Ableitung immer genau den dreifachen Kehrwert des Arguments hat (Argument ist das "x"). Geben Sie alle Funktionen mit dieser Eigenschaft an.

Lösung:

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{x} \\ \rightarrow y(x) = 3 \ln(x) \quad \text{alle: } y(x) = 3 \ln(x) + C$$

HS19 - Aufgabe 1b)

Zeigen Sie, dass $y = \sin(x)$ folgende Differenzialgleichung löst: $y^{(2)} + 2y = \sin(x)$.

Lösung:

$$y' = \cos(x), \quad y'' = -\sin(x) \\ -\sin(x) + 2\sin(x) = \sin(x)$$

HS19 - Aufgabe 1c)

Löst $y = \sin(x) + 7\sin(\sqrt{2}x)$ auch $y^{(2)} + 2y = \sin(x)$? Mit Beweis falls JA oder sonst Gegenargument wenn NEIN.

Lösung:

$$\text{Ja: } y' = \cos(x) + 7\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x), \quad y'' = -\sin(x) - 7(\sqrt{2})^2 \sin(\sqrt{2}x) \\ (-\sin(x) - 14\sin(\sqrt{2}x)) + 2 \cdot (\sin(x) + 7\sin(\sqrt{2}x)) = \sin(x)$$

HS19 - Aufgabe 1d)

Finden Sie eine Lösung der folgenden Differenzialgleichung: $y^{(2)} + 2y = \cos(x)$

Lösung:

$$y = \cos(x)$$

Rep-HS18 (Aug. 2019) - Aufgabe 1c)

Geben Sie ein Beispiel einer Funktion an, deren Ableitung immer genau den dreifachen Wert der Funktion selber hat. Geben Sie alle Funktionen mit dieser Eigenschaft an.

Lösung:

$$y' = 3 \cdot y \quad (\text{lineare DGL}) \\ \rightarrow y(x) = e^{3x} \quad \text{alle: } y(x) = K \cdot e^{3x}$$

HS17 - Aufgabe 1e)

Prüfen Sie, ob $y = x \sin(x)$ eine Lösung der folgenden Differentialgleichung 2. Ordnung ist:

$$y + y'' = 2 \cos(x).$$

Lösung:ableiten und einsetzen \rightarrow Ja

HS16 - Aufgabe 1e)

Geben Sie *alle* Funktionen mit der Eigenschaft an, dass deren Ableitung überall genau dem Funktionswert entspricht (mit Herleitung).

Lösung:

$$y' = y \quad y = K e^x$$

HS16 - Aufgabe 1f)

Geben Sie *alle* Funktionen mit der Eigenschaft an, dass deren Ableitung überall genau dem doppelten Funktionswert entspricht (mit Herleitung).

Lösung:

$$y' = 2y \quad y = K e^{2x}$$

HS16 - Aufgabe 1g)

Geben Sie *alle* Funktionen mit der Eigenschaft an, dass deren Ableitung überall genau dem Kehrwert des Arguments ("x-Wert") entspricht (nur für $x > 0$) (mit Herleitung).

Lösung:

$$y' = \frac{1}{x} \quad y = \ln(x) + C$$

HS16 - Aufgabe 1h)

Geben Sie eine nicht-konstante Funktion an, bei der die vierte Ableitung wieder die ursprüngliche Funktion ist. Beschreiben Sie diese Aufgabenstellung auch mit Hilfe einer Differentialgleichung.

Lösung:

$$y'''' = y \quad \sin(x) \text{ oder } \cos(x)$$

HS15 - Aufgabe 1e)

Geben Sie erstmal die allgemeine Lösung zur Differentialgleichung $y' = x^8 y$ an. Geben Sie jetzt eine spezielle Lösung an, welche durch den Punkt (1,2) geht.

Lösung:

$$y = K e^{\frac{x^9}{9}} \quad y = 2e^{-\frac{1}{9}} e^{\frac{x^9}{9}} = 2e^{-\frac{1}{9} + \frac{x^9}{9}}$$

Rep-HS14 (Sept. 2015) - Aufgabe 1d)

Finden Sie durch raten zwei Lösungen der Differentialgleichung $y - y' + y'' - y''' = 0$. Eine davon muss konstant sein, die andere streng monoton wachsend.

Lösung:

$$y_1 = 0 \quad y_2 = e^x$$

Rep-HS14 (Sept. 2015) - Aufgabe 1e)

Finden Sie noch eine dritte Lösung der Differentialgleichung $y - y' + y'' - y''' = 0$. Diese muss periodisch sein mit periode > 0 .

Lösung: $\sin(x)$ **HS21 - Aufgabe 1c) (Version A)**

Bei $y' = \frac{1}{3}y$ wo $y(0) = 1$ ist die Lösung A) keine Exponentialfunktion, B) eine wachsende Exponentialfunktion, C) eine fallende Exponentialfunktion.

Sie müssen die Gleichung nicht lösen; A, B oder C:

Lösung:

B

HS21 - Aufgabe 1e) (Version A)

Das Wachstum der Bevölkerung einer Insel werde mit einer Differentialgleichung modelliert. In dieser Aufgabe gibt es keine Auswanderung, nur Einwanderung (Immigration) und Wachstum aus eigener Kraft. Stellen Sie die DGL auf, wenn das Wachstum aus eigener Kraft proportional zur aktuellen Anzahl ist und die Immigration proportional zur Wurzel der aktuellen Anzahl ist. Sie müssen die DGL nicht lösen. Geben Sie aber die allgemeine DGL inklusive Proportionalitätskonstanten an.

Lösung: $y' = ay + b\sqrt{y}$

Linearisieren / Approximieren

Rep-HS22 (Sept. 2023) - Aufgabe 1e)

Führen Sie bei der Funktion $f(x) = e^{2x} + 2\sin(x) + 5$ eine Linearisierung an der Stelle $x_0 = 0$ durch und berechnen Sie mit dieser Linearisierung den approximativen Wert von $f(x)$ an der Stelle 0.1.

Lösung:

$$p(x) = 6 + 4x \rightarrow f(0.1) \approx 6 + 0.4 = 6.4$$

Rep-HS21 (Sept. 2022) - Aufgabe 1d)

Führen Sie bei der Funktion $f(x) = e^x + 2x + 5$ eine Linearisierung an der Stelle $x_0 = 0$ durch und berechnen Sie mit dieser Linearisierung den approximativen Wert von $f(x)$ an der Stelle 0.1.

Lösung:

$$p(x) = 6 + 3x \rightarrow f(0.1) \approx 6 + 0.3 = 6.3$$

Rep-HS20 (Sept. 2021) - Aufgabe 1e)

Führen Sie bei der Funktion $f(x) = 6x^2 + 2x + 10$ eine Linearisierung an der Stelle $x_0 = 1$ durch und berechnen sie mit Hilfe dieser Linearisierung den approximativen Wert von $f(x)$ an der Stelle 1.1.

Lösung:

$$f(1.1) \approx 18 + 14 \cdot (1.1 - 1) = 19.4$$

Rep-HS19 (Aug. 2020) - Aufgabe 1d)

Führen Sie bei der Funktion $f(x) = 3x^2 + x + 28$ eine Linearisierung an der Stelle $x_0 = 0$ durch und berechnen sie mit Hilfe dieser Linearisierung den approximativen Wert von $f(x)$ an der Stelle 0.1.

Lösung:

$$f(0.1) \approx 28 + 1 \cdot (0.1 - 0) = 28.1$$

Rep-HS18 (Aug. 2019) - Aufgabe 1d)

Führen Sie bei der Funktion $f(x) = x^3 + 5x^2 + 54$ eine Linearisierung an der Stelle $x_0 = 0$ durch und berechnen sie mit Hilfe dieser Linearisierung den approximativen Wert von $f(x)$ an der Stelle 0.2.

Lösung:

$$f(0.2) \approx 54 + 0 \cdot (x - 0) = 54$$

Rep-HS17 (Aug. 2018) - Aufgabe 1d)

Führen Sie bei der Funktion $f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 20$ eine Linearisierung an der Stelle $x_0 = 1$ durch und berechnen Sie mit Hilfe dieser Linearisierung den approximativen Wert von $f(x)$ an der Stelle 0.8.

Lösung:

$$p(x) = 28 + 26 \cdot (x - 1) \rightarrow f(x) \approx p(0.8) = 22.8$$

HS17 - Aufgabe 1c)

Machen Sie bei der Funktion $f(x) = x^3 + x^2$ eine Linearisierung an der Stelle $x_0 = 1$ und berechnen Sie approximativ mit Hilfe dieser Linearisierung den Wert von $f(x)$ an der Stelle 1.1.

Lösung:

$$p(x) = 2 + 5(x - 1), \quad f(1.1) \approx 2.5$$

4 Weitere wichtige Formeln & Themen

1. Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion

(a) für $f^{-1}(x) = g(x)$:
$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

(b) nur für einzelnen Punkt $y_0 = f(x_0)$:
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

2. Linearisierung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 :
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

3. Definitionsbereich bestimmen: (MAT182 VL folgende) "potentielle Problemfälle umgehen"

(a)
$$\frac{1}{\underbrace{\text{Nenner}}_{\dots \neq 0}}$$

(b)
$$\sqrt{\underbrace{\dots}_{\geq 0}}$$

(c)
$$\log_b(\underbrace{\dots}_{> 0})$$

(d)
$$\arcsin(\underbrace{\dots}_{-1 \leq \dots \leq 1}) = \sin^{-1}(\underbrace{\dots}_{-1 \leq \dots \leq 1}) \quad \text{und} \quad \arccos(\underbrace{\dots}_{-1 \leq \dots \leq 1}) = \cos^{-1}(\underbrace{\dots}_{-1 \leq \dots \leq 1})$$

4. Stetigkeit in x_0 prüfen & Differenzierbarkeit in x_0 prüfen

(a)
$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) =: f(x_0) \Rightarrow f(x) \text{ stetig in } x_0$$

(b)
$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) =: f(x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{x \uparrow x_0} f'(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f'(x) =: f'(x_0) \Rightarrow f(x) \text{ differenzierbar in } x_0$$

differenzierbar \Rightarrow stetig

nicht stetig \Rightarrow nicht differenzierbar

5. Exponentielles Wachstum / Zerfall

- mit Halbwertszeit = $T_{1/2}$:
$$N(t) = K \cdot e^{\pm \lambda \cdot t}, \quad K = \text{Wert zur Zeit } 0, \quad \lambda = \frac{\ln(2)}{T}$$

/ Verdoppelungszeit = T_2 \pm : Wachstum / Zerfall

$T_{1/2}$ von Plutonium-239 $\approx 24'110$ Jahre $T_{1/2}$ von C-14: 5370 Jahre $T_{1/2}$ von Jod-131: 8.02 Tage

- mit Wachstum(srate) p %:
$$N(t) = K \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^t$$

(= jährliche Zu/Abnahme)

- Umrechnung:
$$\lambda = \ln\left(1 \pm \frac{p}{100}\right) \quad p = \pm 100 \cdot (e^\lambda - 1) = \pm 100 \cdot (\exp(\lambda) - 1)$$

6. Approximation

(a) für die Verdoppelungszeit von Kapital bei jährlichem Zinssatz von p %:
$$T \approx 70/p$$

(b) $\ln(2) \approx 0.70$

Exponentielles Wachstum: siehe Playlist-Video/PDF!

HS22 - Aufgabe 1m) (Version A)

Angenommen, Sie haben eine Menge Radioaktivität eingenommen. Diese strahlt jetzt in schädlicher Weise in Ihrem Körper. Einerseits gibt es eine Halbwertszeit, welche den Abbau der Substanz durch Zerfall charakterisiert (Rate λ), andererseits gibt es die sogenannte biologische Halbwertszeit, welche angibt, nach welcher Zeit die Hälfte der Substanz noch im Körper ist (Ausscheiden mit Rate μ). Was ist für Strahlenschäden schlimmer? A: $\lambda = 8 > \mu = 4$ oder B: $\lambda = 4 < \mu = 8$?

Lösung:

A

Rep-HS20 (Sept. 2021) - Aufgabe 1g)

Die Funktion $P(t) = Ce^{\lambda t}$ beschreibt das Wachstum einer Population. Bestimme C und λ , falls $P(0) = 10$ und die Verdoppelungszeit 5 Zeiteinheiten ist.

Lösung:

$$C = 10, \lambda = \frac{\ln(2)}{5}$$

HS20 - Aufgabe 1e) (Version A)

Die Halbwertszeit von Plutonium 239 beträgt (1 Antwort ist richtig)

A) 24'110 Jahre, B) 70 Jahre, C) 240'000 Jahre

Lösung:

A

HS20 - Aufgabe 1f) (Version B)

Die Halbwertszeit von Jod 131 beträgt (1 Antwort ist richtig)

A) 80 Tage, B) 8.02 Tage, C) 21 Jahre

Lösung:

B

HS18 - Aufgabe 1a)

Sie modellieren stetiges Wachstum mit dem Ansatz $f(t) = Ke^{\lambda t}$, wobei die Zeiteinheit Jahre sei. λ sei 0.02. Um wieviel Prozent wächst $f(t)$ innert des ersten Jahres, um wieviel Prozent innerhalb des zweiten Jahres? (Formel stehen lassen, da Taschenrechner nicht erlaubt).

Lösung:

$$1. \text{ Jahr: } (e^{0.02} - 1) \cdot 100, 2. \text{ Jahr: } (e^{0.02} - 1) \cdot 100$$

HS21 - Aufgabe 1a) (Version A)

$f(t)$ wachse pro Zeiteinheit um 2 Prozent. Wie lange dauert es bis zur Vervierfachung? Mit einer approximativen Formel aus der Vorlesung (2x angewandt) und exakt (Formel stehen lassen).

Lösung:

$$\text{approx.: } \frac{70}{2} + \frac{70}{2} = 70 \quad \text{exakt: } (1.02)^n = 4 \rightarrow n = \frac{\ln(4)}{\ln(1.02)} = \frac{2 \ln(2)}{\ln(1.02)}$$