



MAT182 PVK

Aufgabensammlung

Vektorgeometrie

Bei Fragen bitte zuerst auf der Prüfungsmemo-Seite entsprechende Sprachnachricht anhören

https://mathcourses.ch/MAT182/mat182_sprachnachrichten.html

(falls vorhanden) und daraufhin via WhatsApp nachfragen (wie immer inkl. Screenshot)

Danke! :-)

Vektorgeometrie-Aufgaben

HS22 - Aufgabe 1a) (Version A)

Geben Sie eine Koordinatengleichung einer Ebene an, die senkrecht zum Vektor $\vec{n} = (1, 2, 3)$ ist. Geben Sie die Koordinatengleichung an, welche *zusätzlich* durch den Punkt $P(0, 2, 4)$ geht.

Lösung:

$$x + 2y + 3z + d = 0$$

$$x + 2y + 3z - 16 = 0$$

HS22 - Aufgabe 1c) (Version A)

Durch die Koordinatengleichung $7x + 3y + 5z + 1 = 0$ wird eine Ebene definiert. Geben Sie eine weitere, andere Koordinatengleichung an, welche die genau gleiche Ebene definiert.

Lösung:

$$(z.B. \text{Mal } 2:) 14x + 6y + 10z + 2 = 0$$

HS22 - Aufgabe 1e) (Version A)

Finden Sie die Koordinatengleichung der Ebene, welche durch die Parametergleichung $\vec{r} = (0, 0, 0) + \lambda \cdot (0, 1, 0) + \mu \cdot (0, 0, 1)$ gegeben ist.

Lösung:

$$x = 0$$

Rep-HS22 (Sept. 2023) - Aufgabe 2:

Gegeben sind der Punkt $P(2, -1, 1)$ und die Ebenen $E : x - 2y + z + 2 = 0$ und $F : 3x - z + 3 = 0$.

- Berechnen Sie den Abstand des Punktes P zur Ebene E .
- Finden Sie eine dritte Ebene G , die senkrecht zu E und F steht und P enthält.

Lösung:

$$\text{a) Abstand} = \sqrt{147/18}$$

$$\text{b) } G : 2x + 4y + 6z - 6 = 0$$

HS22 - Aufgabe 2: (Version A)

- Betrachte die Punkte $A(2, 4, 4)$, $B(0, 0, 0)$ und $C(-4, -2, 4)$. Zeigen Sie, dass der Winkel bei B zwischen \vec{BA} und \vec{BC} gleich $\pi/2$ ist.
- Bestimmen Sie D so, dass $ABCD$ ein Rechteck ist.
- Ergänzen Sie das Rechteck $ABCD$ zu einem Würfel; geben Sie dazu die anderen 4 Punkte an (2 Lösungen möglich (nach "oben" und nach "unten"), nur eine angeben). Kleine Hilfe, da kein TR: es gilt: $\sqrt{1296} = 36$.
- Wie lang ist die Körperdiagonale?

Lösung:

$$\text{a) } SP = 0 \rightarrow \text{Vektoren orthogonal} \quad \text{b) } D = (-2, 2, 8)$$

$$\text{c) } E = (6, 0, 6), F = (4, -4, 2), G = (0, -6, 6), H = (2, -2, 10) \quad \text{d) } \sqrt{108}$$

Rep-HS21 (Sept. 2022) - Aufgabe 2:

- a) Zeigen Sie, dass die beiden Ebenen $E : x + 2y + 3z = 5$ und $F : 3x + 6y + 9z = 7$ parallel sind und berechnen Sie den Abstand zwischen den beiden Ebenen.
- b) Gegeben sei die Ebene $G : x + 5y - 3z = 7$. Berechnen Sie die Schnittgerade mit der xy -Ebene und den Schnittwinkel mit der xy -Ebene.

Lösung:

a) Normalenvektoren zeigen in die gleiche Richtung
 Abstand = $\frac{4}{21}\sqrt{14}$ b) $y = -\frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$,
 $\varphi = \cos^{-1}(3/\sqrt{35}) = \pi/2 - \cos^{-1}(\sqrt{26/36}) = \sin^{-1}(\sqrt{26/36})$

HS21 - Aufgabe 2: (Version A)

- a) Die Ebene E sei gegeben durch $x + 2y + 4z - 4 = 0$.

Wie lauten die Gleichungen der beiden zu E parallelen, verschiedenen Ebenen, die zu E Abstand 1 haben?

- b) Bei welchem Punkt durchstösst die Gerade g :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

wo $t \in \mathbb{R}$, die Ebene E ?

Lösung:

a) $x + 2y + 4z - 4 + \sqrt{21} = 0$ und $x + 2y + 4z - 4 - \sqrt{21} = 0$ b) $(14/17, 11/17, 8/17)$

Rep-HS20 (Sept. 2021) - Aufgabe 2:

- a) Die Punkte $A(0, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ und $C(2, 3, 4)$ seien Punkte eines Dreiecks. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks und ergänzen Sie das Dreieck zu einem Parallelogramm.
- b) Untersuchen Sie, ob der Punkt $E(3, 4, 5)$ in der Ebene des Dreiecks liegt: wenn ja: beweisen Sie es, wenn nein, widerlegen Sie es.

Lösung:

a) $\sqrt{202}$, $D(2, 4, 4)$ oder $D(2, 2, 4)$ oder $D(-2, -2, -4)$
 b) Nein ($\vec{OE} = \vec{OA} + \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}$ hat $\mu = 1.5 \neq \mu = 1.25$)

HS20 - Aufgabe 2: (Version A)

- a) Wie lautet die Gleichung der Ebene E , die durch $A(0, 0, 0)$ und $B(1, 2, 1)$ geht und senkrecht zu $\vec{n} = (3, 2, u)$ steht (nicht die Parameterdarstellung!)?
- b) Wie lautet die Schnittgerade g der Ebene E mit der xy -Ebene in Parameterdarstellung?

Lösung:

a) $3x + 2y - 7z = 0$ b) $g : (0, 0, 0) + t \cdot (2, -3, 0), t \in \mathbb{R}$

Rep-HS19 (Aug. 2020) - Aufgabe 2:

- a) Gegeben seien die drei Punkte $A(4, -5, 106)$, $B(-4, -13, 92)$ und $C(-6, 3, 84)$. Zeigen Sie, dass es sich dabei um 3 Ecken eines Quadrats handeln könnte. Tipp: Dazu müssen Sie *zwei* Eigenschaften überprüfen.
- b) Berechnen Sie noch den vierten Punkt D .
- c) Wir wollen das Quadrat $ABCD$ noch zu einem Würfel ergänzen. Berechnen Sie den Punkt E , der eine Kantenlänge von A entfernt ist (es gibt 2 Lösungen - wir wollen beide sehen). Die weiteren Punkte müssen nicht berechnet werden.

Lösung:

- a) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 18$ **und** $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$
 b) $D(2, 11, 98)$ (*Punkt-Bezeichnung fix!*)
im Gegenuhrzeigersinn: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$
 c) $A \pm (16, -2, -8) \rightarrow E_1(20, -7, 98), E_2(-12, -3, 114)$

HS19 - Aufgabe 2:

- a) Wie lautet die Gleichung der Ebene E , die durch $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 3)$, $C(4, 5, 6)$ geht (nicht die Parameterdarstellung!)?
- b) Wie gross ist die Fläche des Dreiecks ABC ?
- c) Wie lautet die Schnittgerade der Ebene E mit der xy -Ebene in Parameterdarstellung?

Lösung:

- a) $-3x + 6y - 3z = 0$ b) $\sqrt{54}/2$
 c) $(0, 0, 0) + s \cdot (-2, -1, 0), s \in \mathbb{R}$

Rep-HS18 - Aufgabe 2:

Der Vektor \vec{a} habe Richtung $\vec{r} = (0, 1, 2)$. Zusammen mit dem Vektor $\vec{b} = (1, 2, 3)$ und dem Ursprung O definiert er ein Dreieck OAB : A sei im Endpunkt von \vec{a} , wenn dieser in O ansetzt; analog B . Wie lange muss \vec{a} sein, damit das Dreieck die Fläche 1 hat? Man kann mangels Taschenrechner die Formel stehen lassen.

Lösung:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

HS18 - Aufgabe 1b)

Gegeben seien zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} , beide nicht der Nullvektor und senkrecht zueinander. Kann es sein, dass das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ gleich $\vec{0}$ ist? Wenn ja, Beispiel; wenn nein: Grund.

Lösung:Nein, denn die Länge des Kreuzprodukts ist $|\vec{a}||\vec{b}| \neq 0$ **HS18 - Aufgabe 2:**

Von einem Dreieck ABC sei gegeben $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ und $C(x, 1)$. Bestimmen Sie mit Beweis x so, dass die Summe der quadrierten Seitenlängen minimal wird.

Lösung:

$$x = 0.5$$

Rep-HS17 - Aufgabe 2:

- a) Gegeben seien 3 Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} . Wenn \vec{a} senkrecht auf \vec{b} steht und \vec{b} senkrecht auf \vec{c} , folgt daraus, dass auch \vec{a} senkrecht auf \vec{c} steht? Falls ja: Beweis; Falls nein: Gegenbeispiel.
- b) Von einem Quadrat $ABCD$ kennt man die beiden ersten Punkte vollständig: $A(5, 4, -3), B(-2, 8, 1)$; vom dritten Punkt unvollständig $C(2, ?, 0)$. Berechnen Sie C und D vollständig. Gibt es nur eine Lösung?

Lösung:

a) Nein! (wähle z.B. $\vec{c} = k \cdot \vec{a}$) b) Ja, $C(2, 16, 0), D(9, 12, -4)$

HS17 - Aufgabe 2:

- a) Gegeben seien neben Ursprung $O(0, 0, 0)$ auch die Punkte $A(1, 1, 1)$ und $B(0, 2, 0)$. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren \vec{OA} und \vec{OB} . Ausdrücke in trigonometrischen Funktionen oder deren Umkehrfunktionen kann man stehen lassen.
- b) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks OAB .

Lösung:

a) $\varphi = \arccos(1/\sqrt{3})$ b) $\sqrt{8}/2 = \sqrt{2}$

HS16 - Aufgabe 2:

- a) Geben Sie alle Punkte P in der xy -Ebene auf der Geraden $x = 0.5$ an, von denen aus die beiden Punkte $A(0, 0, 0)$ und $B(1, 0, 0)$ unter einem Winkel von 90 Grad gesehen werden (geometrische Anschauung reicht nicht; mit Rechnung mit Skalarprodukt bitte).
- b) Geben Sie alle Punkte P in der xy -Ebene an, von denen aus die beiden Punkte $A(0, 0, 0)$ und $B(1, 0, 0)$ unter einem Winkel von 90 Grad gesehen werden (geometrische Anschauung reicht nicht - **hilft aber am Schluss bei der Umformung**; mit Rechnung mit Skalarprodukt bitte). Prüfen Sie am Schluss bitte, ob wirklich alle Punkte aus der Rechnung in Frage kommen und beschreiben Sie die Menge der Punkte.
- c) Geben Sie alle Punkte P im Raum an, von denen aus die beiden Punkte $A(0, 0, 0)$ und $B(1, 0, 0)$ unter einem Winkel von 90 Grad gesehen werden (geometrische Anschauung reicht nicht; mit Rechnung mit Skalarprodukt bitte). Prüfen Sie am Schluss bitte, ob wirklich alle Punkte aus der Rechnung in Frage kommen und beschreiben Sie die Menge der Punkte.

Lösung:

a) $(1/2, 1/2, 0)$ und $(1/2, -1/2, 0)$ b) Kreis mit $r = 0.5$ und $M = (0.5, 0)$ c) Kugel mit $r = 0.5$ und $M = (0.5, 0, 0)$

Rep-HS15 - Aufgabe 1h) :

Die Vektoren \vec{e}_1, \vec{e}_2 seien definiert als $\vec{e}_1 := (5, 0, 0)$ und $\vec{e}_2 := (0, 2, 3)$. Welchen Vektor erhält man, wenn man das Kreuzprodukt von \vec{e}_1 und \vec{e}_2 bildet und den resultierenden Vektor noch um den Faktor 3 streckt?

Lösung:

(0 - 45 30)

Rep-HS15 (Sept. 2016) - Aufgabe 1h)

Die Vektoren \vec{e}_1, \vec{e}_2 seien definiert als $\vec{e}_1 := (5, 0, 0)$ und $\vec{e}_2 := (0, 2, 3)$. Welchen Vektor erhält man, wenn man das Kreuzprodukt von \vec{e}_1 und \vec{e}_2 bildet und den resultierenden Vektor noch um den Faktor 3 streckt?

Lösung: $(0, -45, 30)^t$ **Rep-HS15 - Aufgabe 2 :**

- a) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,0,3)$.
b) Geben Sie die Cosinus' der drei Winkel des Dreiecks an (kürzen soweit möglich).

Lösung:

a) 1 b) in $(0,0,1)$: $\cos(\alpha) = \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
in $(0,1,0)$: $\cos(\beta) = \frac{4}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ in $(0,0,3)$: $\cos(\gamma) = \frac{3}{\sqrt{10}}$

HS15 - Aufgabe 1b)

Sie haben 2 Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Beschreiben Sie in natürlicher Sprache, in welchen Fällen das Skalarprodukt 0 ist.

Lösung:wenn \vec{a} oder \vec{b} Nullvektoren sind; Oder $\vec{a} \perp \vec{b}$ (senkrecht)**HS15 - Aufgabe 1c)**

Folgt aus $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}$ dass auch $\vec{b} = \vec{c}$? Wenn ja, beweisen Sie es, wenn nein, geben Sie ein einfaches Gegeneispiel an.

Lösung:Nein. Nicht wenn $\vec{a} = 0 \rightarrow \vec{b}, \vec{c}$ beliebig**HS15 - Aufgabe 1d)**

Die Vektoren \vec{e}_1, \vec{e}_2 seien definiert als $\vec{e}_1 := (1, 0, 0)$ und $\vec{e}_2 := (0, 2, 0)$. Welchen Vektor erhält man, wenn man das Kreuzprodukt von \vec{e}_1 und \vec{e}_2 bildet und den resultierenden Vektor noch um den Faktor 2 streckt?

Lösung: $(0, 0, 4)$ **Rep-HS14 - Aufgabe 1a)**

Für welche zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} gelte: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{2}$, $|\vec{a}||\vec{b}| = 4$. Geben Sie den kleineren Zwischenwinkel an. Geben Sie auch ein konkretes Beispiel von \vec{a} und \vec{b} mit Koordinaten an.

Lösung: $\frac{\pi}{4}$ oder 45° Bsp.: $\vec{a} = (2, 0)$, $\vec{b} = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Rep-HS14 - Aufgabe 2:

Da Sie ohne Taschenrechner arbeiten, können Sie einzelne Ausdrücke in dieser Aufgabe auch unausgerechnet stehen lassen. Gegeben sei der Punkt $A(1, 3, 4)$.

- Welche beiden Punkte B, C auf der x -Achse haben genau Abstand $\sqrt{50}$ von A ?
- Geben Sie einen Normalenvektor zur Ebene durch die Punkte A, B, C an.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken A, B, C .

Lösung:

$$\text{a) } B = (-4, 0, 0), C = (6, 0, 0) \quad \text{b) } \vec{n} = (0, -40, 30)^T \quad \text{c) } 25$$

HS14 - Aufgabe 1.1) - 1.3)

- Sei g eine Gerade, welche durch die beiden Punkte $A(1, 2, 3)$ und $B(4, 5, 6)$ geht. In welchem Punkt C durchsticht diese Gerade die x - y -Ebene?
- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $A(0, 0, 0), B(1, 1, 1), C(5, 0, 2)$.
- Ist das Vektorprodukt kommutativ? Wenn ja, beweisen Sie es; wenn nein, rechnen Sie ein einfaches Gegenbeispiel dazu.

Lösung:

$$\begin{aligned} 1) C &= (-2, -1, 0) & 2) \frac{\sqrt{38}}{2} & 3) \vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a} \\ \text{z.B. } \vec{a} &= (1 \ 0 \ 0) \text{ und } \vec{b} = (0 \ 1 \ 0) \rightarrow (0 \ 0 \ 1) \neq (0 \ 0 \ -1) \end{aligned}$$

Rep-HS13 - Aufgabe 2 : Wir legen durch die drei Punkte $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ eine Ebene.

- Machen Sie dazu eine Skizze und geben Sie einen Normalenvektor der Länge 1 zur Ebene an (Herleitung wegen schöner Zahlen und Skizze nicht nötig).
- Geben Sie noch einen zweiten, anderen Normalenvektor der Länge 1 zur Ebene an.
- Wie sieht die Ebenengleichung aus?
- Welche Winkel hat die Ebene zur x - y -Ebene? [Es ist nicht 45!; sie können den trigonometrischen Ausdruck stehen lassen]

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{n} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) & \text{b) } \vec{n}_2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ \text{c) } x + y + z - 1 &= 0 & \text{d) } \alpha &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \end{aligned}$$

ProbePrüfung HS12 - Aufgabe 2:

Geben Sie alle Punkte auf der y -Achse an, von denen man die beiden Punkte $A(2; 3; 1)$ und $B(4;-4; 2)$ unter einem rechten Winkel sieht.

Lösung:

$$(0, -2, 0) \text{ und } (0, 1, 0)$$

HS12 - Aufgabe 2:

Wie lautet die Gleichung der Ebene, welche durch die drei Punkte $A(0,0,1), B(0,1,0)$ und $C(1,0,0)$ geht?

Lösung:

$$x + y + z - 1 = 0$$