MAT182 PVK

Aufgabensammlung

Kurvenintegral

Bei Fragen bitte zuerst auf der Prüfungsmemo-Seite entsprechende Sprachnachricht anhören

https://mathcourses.ch/MAT182/mat182_sprachnachrichten.html

(falls vorhanden) und daraufhin via WhatsApp nachfragen (wie immer inkl. Screenshot)

Danke! :-)

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat182.html

Kurvenintegral

Rep-HS22 (Sept. 2023) - Aufgabe 5:

Gegeben sei die Raumkurve $\xi: \; t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t + 3 \\ t^3 \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq \pi)$. Das Vektorfeld $\vec{F}$ sei folgendermassen:

$$\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ -2x \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_\xi \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$.

Lösung: $\int_0^\pi 2 + 6\sin(t) + 3t^5)dt = 2\pi + \pi^6/2 + 12$

HS22 - Aufgabe 4: (Version A)

a) Gegeben sei die Kurve $\xi: \; t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 3t \\ -5t^2 \\ t \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq 1)$. Wo ist die Schnelligkeit minimal, wo maximal?

b) Gibt es in $0 \leq t \leq 1$ eine Stelle, bei der die Tangente an ξ senkrecht zur Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ steht?

Wenn ja, wo; wenn nein: beweisen Sie es.

c) Geben Sie den Geschwindigkeitsvektor an, wenn die y-Koordinate der Kurve den Wert -1 erreicht.

Lösung:

a) lokales + absolutes Minimum bei $t = \frac{3}{52}$,
lok. + glob. Max bei $t = 1$, (lok. Max bei $t = 0$)
b) Ja, da SP $= -18t = 0$ bei $t = 0$
c) $\dot{\vec{r}}(\sqrt{1/5}) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{1/5} - 3 \\ -10\sqrt{1/5} \\ 1 \end{pmatrix}$

HS22 - Aufgabe 5: (Version A)

Gegeben sei die Kurve $\xi: \; t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -t^2 \\ 3 \\ t^3 \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq 2)$. Das Vektorfeld $\vec{F}$ sei folgendermassen:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 \\ x_2 - x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_\xi \vec{F}(\vec{x})d\vec{x}$.

Lösung: $\int_0^2 -6t^5 - 9t^2 dt = -88$

Rep-HS21 (Sept. 2022) - Aufgabe 5:

a) Gegeben sei die Raumkurve $\vec{r}: \ t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t)\cos(t) \\ \sin^2(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Bestimme die Punkte mit den Parameterwerten $t = \pi/4$ und $t = \pi/2$.

b) Zeige, dass $\vec{r}$ auf der Kugel mit Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ liegt. (Tipp: Dazu müssen die Komponenten der Kurve dieser Gleichung genügen.)

c) Berechne die Punkte von $\vec{r}$, deren Tangentialvektor parallel zur yz-Ebene ist.

Lösung:

a) $\vec{r}(\pi/4) = (0.5, 0.5, \sqrt{0.5})$, $\vec{r}(\pi/2) = (0, 1, 0)$

b) $[\sin(t)\cos(t)]^2 + \sin^4(t) + \cos^2(t) = \ldots = 1$

c) bei $t = \pi/4, t = 3\pi/4, t = 5\pi/4$ und $t = 7\pi/4$

HS21 - Aufgabe 4: (Version A)

a) Gegeben sei die Kurve $\xi: \ t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -2t^2 + 3t \\ 5t \\ -t^2 + 2 \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq 2)$. Wo ist die Schnelligkeit minimal, wo maximal?

Gibt es in $0 \leq t \leq 2$ eine Stelle, bei der die Tangente an ξ Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat (vorsicht, nicht: "in Richtung des *Punktes* $(1, 1, 1)$ zeigt")? Wenn ja, wo; wenn nein: beweisen Sie es.

b) Geben Sie den Geschwindigkeitsvektor an, wenn die y-Koordinate der Kurve den Wert 1 erreicht.

Lösung:

a) lok. + glob. Min bei $t = 0.6$, lok. + glob. Max bei $t = 2$

nein, da $-2t_0 = 5$ keine Lsg in $[0, 2]$ hat.

b) $\dot{\vec{r}}(0.2) = (2.2, 5, -0.4)^T$

HS21 - Aufgabe 5: (Version A)

Gegeben sei die Kurve $\xi: \ t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -t^3 \\ t - t^2 \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq 1)$. Das Vektorfeld $\vec{F}$ sei folgendermassen:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_3 \\ x_1 - x_2 \\ -x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_\xi \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x}$.

Lösung:

Rep-HS20 (Sept. 2021) - Aufgabe 5:

a) Gegeben sei die Bahn des Punktes $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2-1 \\ 4t-t^3 \\ t^2+t \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq 2)$. Wo ist der Punkt zur Zeit 2 und in welche Richtung bewegt er sich dort?

b) Es gibt eine Stelle A (wo $0 \leq t \leq 2$), bei der man die Bahn des Punktes tangential verlassen kann und danach den Punkt $B(2, 4, 5)$ trifft. Berechnen Sie diesen Punkt A.

Lösung:

a) $\vec{x}(2) = (3, 0, 6)^T$ in Richtung $\dot{x}(2) = (4, -8, 5)^T$

b) $A(0, 3, 2)$

HS20 - Aufgabe 4: (Version A)

a) Gegeben sei die Kurve $\xi: \ t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2+t \\ 2t \\ t^2-1 \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq 1)$. Wo ist die Schnelligkeit minimal, wo maximal?

b) Mit welcher Schnelligkeit erreicht man die Höhe -0.75?

Lösung:

a) lok. + glob. Min bei $t = 0$, lok. + glob. Max bei $x = 1$

b) $v(0.5) = 3$

HS20 - Aufgabe 5: (Version A)

Gegeben sei die Kurve $\xi: \ t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ t^4 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Das Vektorfeld $\vec{F}$ sei folgendermassen:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y^2 \\ -x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_\xi \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x}$. Sie können hohe Potenzen unausgerechnet stehen lassen.

Lösung:

$2\pi + \frac{(2\pi)^{12}}{3}$

Rep-HS19 (Aug. 2020) - Aufgabe 5:

Gegeben sei die Kurve $\xi: \; t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq \pi)$. Das Vektorfeld $\vec{F}$ sei folgendermassen:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z^2 \\ x \\ x-y \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_\xi \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x}$.

Lösung: $-\frac{\pi^2}{2} - \pi$

Rep-HS19 (Aug. 2020) - Aufgabe 8:

a) Gegeben sei die Bahn des Punktes $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ (t-1)^2 \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Wo ist die Schnelligkeit maximal, wo minimal?

b) Berechnen Sie beim Punkt $\vec{x}(\pi)$ die Gleichung der Tangente an die Bahn.

c) Berechnen Sie den Durchstosspunkt durch die $x-y$-Ebene der obigen Tangente.

Lösung:

a) minimal bei $t = 1$ mit $f(1) = 1$,
maximal bei $t = 2\pi$ mit $f(2\pi) = \sqrt{16\pi^2 - 16\pi + 5}$

b) $g(t) = (-1, 0, (\pi-1)^2) + t \cdot (0, -1, 2(\pi - 1))$ *(als Vektoren)*

c) $g(\frac{1-\pi}{2}) = (-1, \frac{\pi-1}{2}, 0)$

HS19 - Aufgabe 4:

a) Gegeben sei die Kurve $\xi: \; t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 5t \\ t \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq 1)$. Wo ist die Schnelligkeit minimal, wo maximal?

b) Gibt es bei der Kurve in a) eine Tangente, welche parallel zur z-Achse ist?

Lösung:

a) minimal bei $t = 0$ (von 26), maximal bei $t = 1$ (von 30)

b) nein, da $\dot{\vec{x}}(t) = (2t \;\; 5 \neq 0 \;\; 1)$

HS19 - Aufgabe 5:

a) Gegeben sei die Kurve $\xi: \ t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq \pi)$. Das Vektorfeld $\vec{F}$ sei folgendermassen:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_\xi \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x}$.

b) Ist der Wert des Kurvenintegrals abhängig von der Parametrisierung der Kurve ξ von $(1, 0, 0)$ nach $(-1, 0, \pi^2)$? (Ja/Nein als Antwort)

Lösung: a) $-\pi + \frac{\pi^6}{3}$ b) Nein

Rep-HS18 - Aufgabe 5:

In welchem Zeitpunkt muss man bei der nachfolgenden Kurve in der Ebene die wirksamen Kräfte stoppen, damit der Körper auf seinem weiteren Weg ("tangential weiterfliegend") durch den Punkt P(2,8) geht (soweit vereinfachen wie möglich ohne TR)?

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 3t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Tipp: Je nachdem, wie sie die Aufgabe angehen, gibt es zwei Lösungen. Eine Lösung ist jedoch ein mathematisches Artefakt, welches physikalisch keinen Sinn macht.

Lösung: $t = \frac{8-\sqrt{46}}{3}$

HS18 - Aufgabe 4:

a) Gegeben sei die Kurve $\xi: \ t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -3t^2 \\ t^2 - 2t \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq 1)$. Wo ist die Schnelligkeit minimal, wo maximal?

b) Gibt es bei der Kurve in a) eine Tangente, welche parallel zu $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Lösung: a) minimal bei $t = 0.1$, maximal bei $t = 1$ b) Nein

Rep-HS17 - Aufgabe 7:

Wir betrachten die durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -2t^2 \\ t+2 \\ 5t \end{pmatrix}, \ t \in [0,1]$$

definierte Kurve C. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot d\vec{x}$ für das Vektorfeld:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\frac{8}{5} + 4 + \frac{21}{2} - 8 = \frac{81}{10}$

HS17 - Aufgabe 5:

a) Gegeben sei die Kurve $\xi : \ t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \\ \pi - t \end{pmatrix}, \ (0 \leq t \leq \pi)$. g sei die Tangente zur Kurve im Punkt $\vec{x}(\frac{\pi}{2})$.

Wo trifft g die $x-y$-Ebene?

b) Sei zusätzlich das Vektorfeld $\vec{F}$ gegeben:

$$\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_\xi \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x}$.

Lösung: a) $(-\frac{\pi}{2}, -1, 0)$ b) $-\pi$

Rep-HS16 - Aufgabe 7:

Wir betrachten die durch

$$\begin{pmatrix} 3t \\ t^2 \\ 5t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1]$$

definierte Kurve C. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot d\vec{x}$ für das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\frac{37}{2}$

HS16 - Aufgabe 5:

Ein Teilchen geht entlang der Kurve C von $A(0,0,1)$ nach $B(1,1,0)$, wo die Kurve C für $t \in [0,1]$ folgendermassen parametrisiert ist: $\vec{x}(t) = (t, t^2, 1-t^3)$. Es wirkt das Kraftfeld $\vec{F}(x,y,z) = (x-y, y^2, z-x)$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \vec{F} d\vec{x}$.

Lösung: $\frac{3}{4}$

Rep-HS15 - Aufgabe 5:

Wir betrachten die durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ at \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

definierte Schraubenlinie C, wobei a eine Konstante ist.

a) Wählen Sie a so, dass die Ganghöhe 2 wird und skizzieren Sie die Situation.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangenten an C im Punkt $\vec{x}(\pi/2)$ mit der xy-Ebene.

c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot d\vec{x}$ für das Vektorfeld:

$$\vec{F}(\vec{x}) = F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: a) $a = \frac{1}{\pi}$ b) $(\frac{3\pi}{2}, 3, 0)$ c) -18π

Rep-HS14 - Aufgabe 8:

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot d\vec{x}$, wobei C die folgende Parameterdarstellung hat:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4\sin t \\ 4\cos t \\ 9t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 4\pi].$$

Das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{x})$ sei das Folgende: $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Lösung: $64\pi + 64 \cdot 162\pi^4$

HS12 - Aufgabe 5:

Gegeben sei die Kurve $\xi : t \mapsto \vec{x}(t) := \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ at \end{pmatrix}, (0 \leq t \leq 4\pi)$ wo a eine Konstante ist.

a) Wie muss man a wählen, damit die Ganghöhe 8 wird?

b) Sei zusätzlich das Vektorfeld $\vec{F}$ gegeben:

$$\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ y \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\oint_\xi \vec{F}(\vec{x})d\vec{x}$, wenn Sie obige Ganghöhe wählen.

Lösung: a) $a = \frac{4}{\pi}$ b) -16π

Prüfung HS08 - Aufgabe 3:

Wir betrachten die Kurve $\mathcal{C}$ definiert durch

$$t \mapsto \vec{x}(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ -t\pi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

a) Skizzieren Sie die Situation und prüfen Sie nach, ob die Vektoren $\dot{\vec{x}}(t)$ und $\ddot{\vec{x}}(t)$ aufeinander senkrecht stehen.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangente an $\mathcal{C}$ im Punkt $\vec{x}(\frac{1}{2}\pi)$ mit der x_1-x_2-Ebene.

c) Berechnen Sie $\oint_\mathcal{C} \vec{F}(\vec{x})d\vec{x}$ für das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: a) Skalarprodukt = 0 (d.h. stehen senkrecht aufeinander). b) $(\frac{\pi}{2}/1/0)$ c) -2π.