www.mathcourses.ch/mat182.html

Formelsammlung MAT182

1 Wichtigste Algebra-Grundlagen

1.1 Potenzgesetze

1. $(ab)^n = a^n \cdot b^n \qquad (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$
3. $a^0 = 1 \qquad 1^n = 1$
4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

1.2 Logarithmusgesetze

Hinweis: Falls nur log(...) steht, meinen Mathematiker oft ln(...)

1. $\log x + \log y = \log(x \cdot y) \qquad \log x - \log y = \log(\frac{x}{y}) \qquad n \cdot \log x = \log(x^n)$
2. $e^{\ln x} = x = \ln e^x$ (falls nichts zwischen e und ln ist!! Sonst zuerst Potenz-/Logarithmengesetze anwenden!)
3. $\ln(e) = 1 \qquad \log_b(1) = 0$
4. $b^{\log_b(x)} = x = \log_b(b^x)$
5. Definition $\qquad y = b^x \Leftrightarrow \log_b(y) = x$
6. $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ (Basiswechselsatz)

Hausaufgaben-Empfehlung vor dem PVK: "Vorarbeit PVK Grundlagen-Algebra" (siehe auch Homepage)

1.3 Gleichungen lösen

1. Quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (Mitternachtsformel)$$

2. Kubische Gleichungen (z.B. $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$):

   1. Nullstelle (durch pröbeln) erraten 2. Polynomdivision anwenden 3. weiteren NS via Mitternachtsformel

`Song von DorFuchs: https://youtu.be/K8K4_gowb4E?si=nbw-soxyW4zIEDlv`

1.4 Trigonometrie

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
	0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞^*	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\infty^*$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$

Umkehrfunktionen $\arcsin(x)/\arccos(x)/\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$:

Einfach von Innen nach Aussen die Tabelle benutzen :)

Beispiel: $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

$*$ existiert nicht, aber $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty$ bzw. $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$

$*$ existiert nicht, aber $\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ bzw. $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}{}^*$

$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$; $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$; $\tan(x) = \tan(x + \pi)$

(z.B. praktisch für negative Werte)

x	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
	$-30°$	$-45°$	$-60°$	$-90°$
$\sin x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\infty^*$

$*$ existiert nicht, aber $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$

1. Bogenmass $\xrightarrow{\cdot \frac{360°}{2\pi}}$ Gradmass, Gradmass $\xrightarrow{\cdot \frac{2\pi}{360°}}$ Bogenmass
2. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
3. $\sin(-x) = -\sin x$ $\quad \cos(-x) = \cos x$ $\quad \tan(-x) = -\tan x$
4. $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ (Additionstheoreme)

   $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

1.5 Binomische Formeln

1. Binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. Binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. Binomische Formel: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

2 Differentialrechnung

2.1 Ableitungsregeln

1. Produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
2. Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
3. Kettenregel (Innere Funktion erkennen) $[f(u(x))]' = \underbrace{f'(u(x))}_{\text{äussere Abl.}} \cdot \underbrace{u'(x)}_{\text{innere Abl.}}$

2.2 Kurvendiskussion

1. f ist (streng) monoton $\begin{cases} \text{wachsend} & \text{falls } f'(x) > 0 \\ \text{fallend} & \text{falls } f'(x) < 0 \end{cases}$
2. Nullstellen: $f(x) = 0$
3. Extremalstellen bestimmen
   - kritische Punkte: $f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ ist ein $\begin{cases} \text{Minimum} & \text{falls } f''(x_0) > 0 \\ \text{Maximum} & \text{falls } f''(x_0) < 0 \\ \text{Terrassenpunkt} & \text{falls } f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0 \end{cases}$
   - Randpunkte (bei abgeschlossenem Definitionsbereich $D_f = [a, b]$)
   - (ev.) nicht differenzierbare Stellen
4. $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ ist ein Wendepunkt $\xrightarrow{f'''(x_0)=0}$ siehe Playlist-Zusatzvideo
5. Globale Extrema? $\Rightarrow$ y-Werte vergleichen!
   - bei abgeschlossenem Definitionsbereich $[a, b]$ gibt es immer ein globales Maximum & glob. Minimum!
     $\rightarrow$ grösster y-Wert ist das globale Maximum, kleinster y-Wert das globale Minimum.
   - bei offenem Definitionsbereich (a, b) gibt es nicht unbedingt ein glob. Max. und/oder globales Min.!
     $\lim_{x \to a} f(x)$ und $\lim_{x \to b} f(x)$ berechnen.
     Falls $\lim_{x \to a,b} f(x)$ grösster oder kleinster Wert ist $\Rightarrow$ kein globales Max. / Min. vorhanden

2.3 Optimierungsaufgaben (*mit Nebenbedingung*)

1. **Was** soll maximiert / minimiert werden!? $\longrightarrow$ Formel finden $\ldots = f(x)$! (*oder* $= f(x, y)$)
   (a) Schnelligkeit (einer Ortskurve $\vec{x}(t)$): $f(x) = |\dot{\vec{x}}(t)|$
   (b) Abstand zwischen $P(x_0|y_0)$ und $y = f(x)$: $f(x) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2}$
2. *Eventuell Nebenbedingung nach x oder y auflösen und oben einsetzen*
3. Globales Maximum / Minimum von $f(x)$ bestimmen

3 Integralrechnung

3.1 Vier Methoden um ein Integral zu lösen:

1. direkt / einfaches Integral (eventuell nach Vereinfachung / Algebra-Umformungen!)
2. Integral-Tabelle benutzen (z.B. oft bei $\frac{1}{\dots}$ oder $\sqrt{\dots}$)
3. Substitutionsmethode ($\leftarrow$ Kettenregel)
4. Partielle Integration ($\leftarrow$ Produktregel)

3.2 weitere Integral-Aufgaben

1. Uneigentliches Integrale
2. Rotationsvolumen: $V = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 \, dx$
3. (geometrische) Fläche berechnen
   - zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$ mit Schnittpunkten SP1 und SP2: $\left| \int_{\text{SP1}}^{\text{SP2}} f(x) - g(x) \, dx \right|$
   - zwischen $f(x)$ und der x-Achse (mit Nullstellen NS1 und NS2): $\left| \int_{\text{NS1}}^{\text{NS2}} f(x) \, dx \right|$

4 Weitere wichtige Formeln & Themen

1. Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion

   (a) für $f^{-1}(x) = g(x)$: $$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

   (b) nur für einzelnen Punkt $y_0 = f(x_0)$: $$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

2. Linearisierung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0: $$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

3. Definitionsbereich bestimmen: *(MAT182 VL folgende) "potentielle Problemfälle umgehen"*

   (a) $\dfrac{1}{\underbrace{\text{Nenner}}_{\dots\,\neq\,0}}$

   (b) $\sqrt{\underbrace{\dots}_{\geq 0}}$

   (c) $\log_b(\underbrace{\dots}_{\dots\,>\,0})$

   (d) $\arcsin(\underbrace{\dots\dots}_{-1\leq\dots\leq 1}) = \sin^{-1}(\underbrace{\dots\dots}_{-1\leq\dots\leq 1})$ und $\arccos(\underbrace{\dots\dots}_{-1\leq\dots\leq 1}) = \cos^{-1}(\underbrace{\dots\dots}_{-1\leq\dots\leq 1})$

4. Stetigkeit in x_0 prüfen & Differenzierbarkeit in x_0 prüfen

   (a) $\lim\limits_{x\uparrow x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\downarrow x_0^+} f(x) =: f(x_0) \quad\Rightarrow\quad f(x)$ stetig in x_0

   (b) $\lim\limits_{x\uparrow x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\downarrow x_0^+} f(x) =: f(x_0)$ **und** $\lim\limits_{x\uparrow x_0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\downarrow x_0^+} f'(x) =: f'(x_0) \quad\Rightarrow\quad f(x)$ differenzierbar in x_0

   differenzierbar $\Rightarrow$ stetig

   nicht stetig $\Rightarrow$ nicht differenzierbar

5. Exponentielles Wachstum / Zerfall

   - mit Halbwertszeit $= T_{1/2}$: / Verdoppelungszeit $= T_2$ $\qquad N(t) = K \cdot e^{\pm\lambda\cdot t}$, $\quad K =$ Wert zur Zeit 0, $\quad \lambda = \dfrac{\ln(2)}{\mathrm{T}}$,

     $\pm$: Wachstum / Zerfall

     $T_{1/2}$ von Plutonium-239 $\approx$ 24'110 Jahre $\qquad T_{1/2}$ von C-14: 5370 Jahre $\qquad T_{1/2}$ von Jod-131: 8.02 Tage

   - mit Wachstum(srate) p %: (= jährliche Zu/Abnahme) $\qquad N(t) = K\left(1 \pm \dfrac{p}{100}\right)^t$

   - Umrechnung: $\qquad \lambda = \ln\left(1 \pm \dfrac{p}{100}\right) \qquad p = \pm 100 \cdot \left(e^{\lambda} - 1\right) = \pm 100 \cdot \left(\exp(\lambda) - 1\right)$

6. Approximation

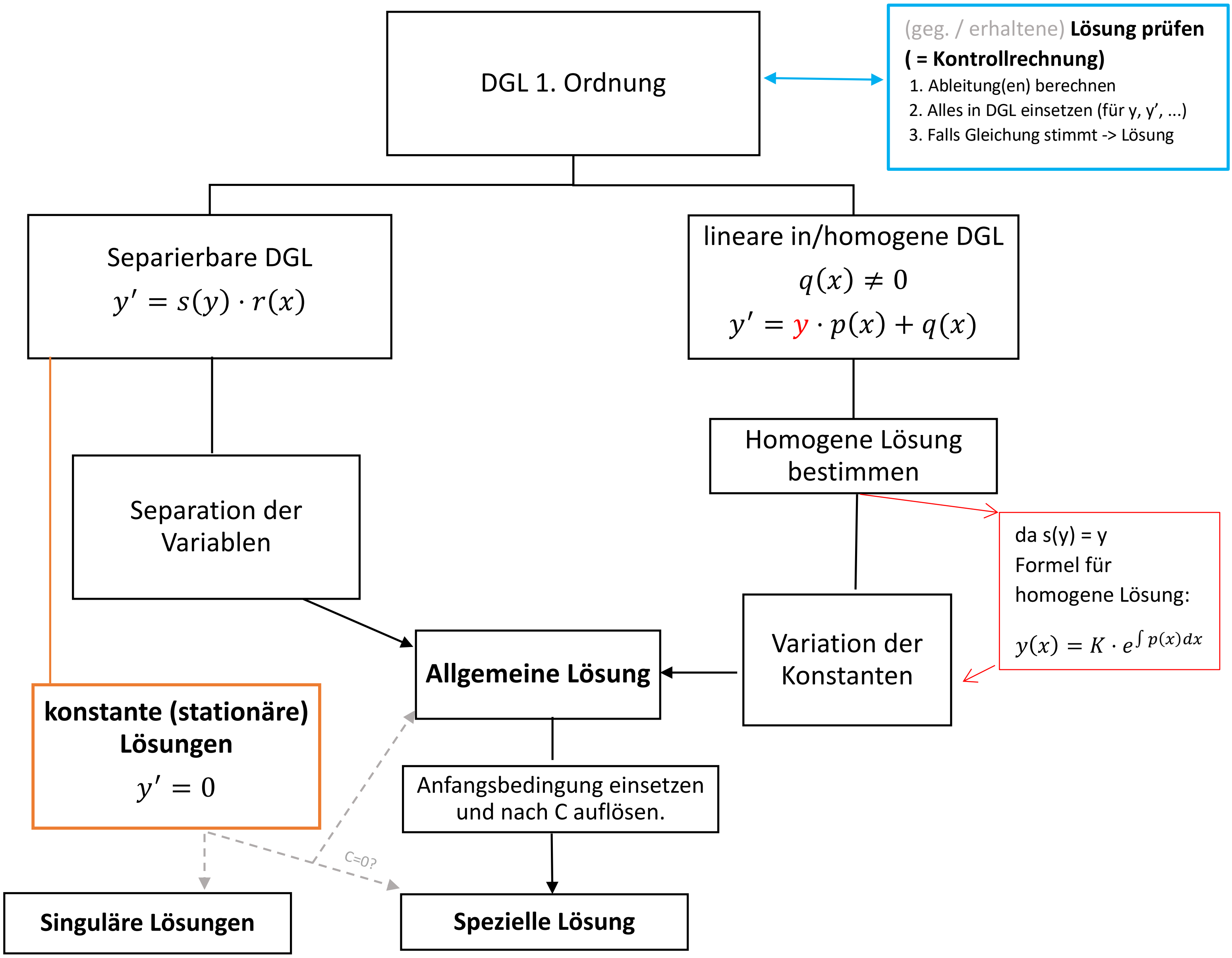
   (a) für die Verdoppelungszeit von Kapital bei jährlichem Zinssatz von p %: $\quad T \approx 70/p$

   (b) $\ln(2) \approx 0.70$

MathCourses

www.mathcourses.ch/mat182.html

DGL Übersicht
(für MAT182)



MathCourses

www.mathcourses.ch/mat182.html

MAT182 Zwischenkurs 1

Vektorgeometrie

Lernkärtchen & Grundlagen

(im verlinkten Playlist-Video gehe ich die Lernkärtchen Schritt für Schritt durch)

Homepage / Webseite:

`www.mathcourses.ch/mat182.html`

Vektor zwischen zwei Punkten:

Man rechnet immer Endpunkt - Anfangspunkt.

Beispiel: $A(1,-3,3),\ B(-5,3,0)$

$$\text{Vektor } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5-1 \\ 3-(-3) \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Länge eines Vektors:

Die Länge eines Vektors Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist:

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(x)^2+(y)^2+(z)^2}$$

Beispiel: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-6)^2+6^2+(-3)^2} = \sqrt{81} = 9$$

Länge eines Vektors verändern:

Länge von $\vec{v}$ um λ verändern: $\lambda \cdot \vec{v}$

Beispiel:

Vektor $\overrightarrow{AB}$ (mit $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 9$) soll Länge 1 haben.

$\Rightarrow$ Wir müssen $\overrightarrow{AB}$ mit 1/9 multiplizieren:

$$\overrightarrow{AB} := \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \text{ hat Länge 1.}$$

Paramterdarstellung einer Geraden:

$g:\ \vec{r} =$ Ortsvektor $+\ t\cdot$ Richtungsvektor

Gerade durch zwei Punkte A und B:

$$g:\ \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t\cdot\overrightarrow{AB}$$

Beispiel: Gerade g durch $A(1,-3,3)$ und $B(-5,3,0)$

$$g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung einer Ebene:

Ebene durch drei Punkte A, B und C:

$$E:\ \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{AC}$$

Beispiel:

Ebene durch $A(1,-3,3), B(-5,3,0)$ und $C(2,2,2)$

$$E:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt & Skalarprodukt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\quad \vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt: $\vec{v}\times\vec{w} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}$

(ergibt einen Vektor welcher senkrecht zu $\vec{v}$ und zu $\vec{w}$ steht)

Skalarprodukt: $\vec{v}\cdot\vec{w} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2$

(um Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zu berechnen)

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\left|\vec{v}\right|\ \left|\vec{w}\right|}\right)$$

Beispiel: $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = -6+30+3 = 27,\ \left|\vec{v_1}\right| = 9,\ \left|\vec{v_2}\right| = \sqrt{27} \rightarrow \cos^{-1}\left(3/\sqrt{27}\right) = 54.74^\circ$

Rechter Winkel $\Longleftrightarrow$ Skalarprodukt $= 0$:

$\vec{v_1}\cdot\vec{v_3} = -6-6+12 = 0 \rightarrow \cos^{-1}(0) = 90^\circ$, d.h. rechter Winkel zw. $\vec{v_1}$ und $\vec{v_3}$

Vektorprodukt braucht man um:

- Die Fläche eines Dreiecks ABC zu berechnen:

$$\text{Fläche } \triangle = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}$$

- senkrechten Vektor zu $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ berechnen:

  (z.B. Normalenvektor $\vec{n}$)

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$$

Koordinatengleichung einer Ebene:

$\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z + \boldsymbol{d} = 0$

wobei $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} = \vec{n} =$ Normalenvektor

1. Normalenvektor $\rightarrow$ a, b, c bestimmen
2. Punkt in Koordinatengleichung einsetzen
3. Gleichung nach d auflösen

   $\Rightarrow$ Koordinatengleichung der Ebene

Koordinatengleichung einer Ebene:

Beispiel: Ebene E durch $A(1,-3,3)$, $B(-5,3,0)$ und $C(2,2,2)$

1. Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \longrightarrow \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ -36 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = 9, b = -9, c = -36$$

2. $A(x = 1, y = -3, z = 3)$ in $9x - 9y - 36z + d = 0$ einsetzen:
3. $9 + 27 - 108 + d = 0 \quad \rightarrow \quad d = 72$

   $\Rightarrow E: \ 9x - 9y - 36z + 72 = 0 \quad : 9 \rightarrow \quad \underline{E: \ x - y - 4z + 8 = 0}$

Schnittpunkt einer Geraden und Ebene:

1. Gerade zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6t \\ 2-4t \\ 3+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. Ebene in Koordinatengleichung $ax + by + cz + d = 0$
3. Für x, y, z die Koordinaten der Geraden einsetzen
4. Gleichung nach t auflösen
5. Lösung in Gerade einsetzen $\rightarrow$ Schnittpunkt

Schnittgerade zweier Ebenen:

1. Koordinatengleichung der Ebenen $\rightarrow \vec{n_1}, \vec{n_2}$
2. Vektorprodukt von $\vec{n_1} \times \vec{n_2} := v \mathrel{\widehat{=}}$ Richtungsvektor
3. Punkt auf Schnitttgeraden ($\widehat{=}$ Ortsvektor). Z.B.:
   - 1 Vble frei wählen, z.B. $x = 0$
   - in Koordinatengleichungen einsetzen
   - $\rightarrow$ 2×2 Gleichungssystem lösen $\rightarrow$ Punkt
   - $\Rightarrow$ Parameterdarstellung der Schnittgeraden

Neigungswinkel zw. einer Geraden und Ebene:

1) Richtungsvektor der Gerade bestimmen $(=: \vec{v})$
2) Normalenvektor der Ebene bestimmen $(=: \vec{n}\ )$
3) Neigungswinkel:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}\right) = 90^\circ - \arccos\left(\frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}\right)$$

Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen:

1) beide Normalenvektoren ($\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$) bestimmen
2) Schnittwinkel $= \varphi = \arccos\left(\frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}\right)$

Abstand zweier Punkte A und B:

$A(x_1, y_1, z_1), \ B(x_2, y_2, z_2)$

Abstand $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Abstand von Punkt A zur Ebene E:

$A = (x_1, y_1, z_1), \quad E: ax + by + cz + d = 0:$

$$\text{Abstand} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Tangente an eine Kurve:

Tangente an eine Kurve $x(t)$ im (gegebenen) Punkt $x(t_0)$:

$t(s) = x(t_0) + s \cdot \dot{x}(t_0)$

Schnittpunkt "Tangente - Ebene":

siehe Lernkärtchen Vektorgeometrie 11