



Zusatz-Aufgaben

”Algebra”

(aus alten MAT182 Übungen)

Gleichungen lösen

HS14 - Ue5-A2:

$$6x^2 - 30x + 24 = 0$$

Lösung:

$$x_1 = 1, x_2 = 4$$

HS14 - Ue2-A3:

$$(3 - x)(4 - x) + 2 - 4 = 0$$

Lösung:

$$x_1 = 2, x_2 = 5$$

HS14 - Ue1-A4:

Vereinfache und bestimme alle Lösungen folgender Gleichung:

$$4x(2x^2 + 3x - 10) - 2x^2(4x + 3) = 0$$

Lösung:

$$2x(3x - 20) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{20}{3}$$

HS14 - Ue8-A3:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2. \text{ Löse } f'(x) = 0.$$

Lösung:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

HS14 - Ue8-A3:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0.$$

Lösung:

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$$

HS14 - Ue1-A2:

$$3x^2 + 6x = \frac{4}{3} + \frac{8}{3x}$$

Lösung:

$$x_1 = -2, x_2 = -\frac{2}{3}, x_3 = \frac{2}{3}$$

HS14 - Ue5-A3:

$$\frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 0$$

Lösung:

$$x_1 = \frac{2}{5}$$

HS14 - Ue4-A1:

Lösen Sie $2^x - 2^{x-1} = 2$ exakt nach x auf.

Lösung:

$$x = 2$$

Gleichungen / DGL-Algebra-Schritte:

MAT182 Prüfung HS11 - Aufgabe 3

Löse folgende Gleichung nach y auf:

$$-e^{-y} = -x^3 + C$$

Lösung:

$$y = -\ln(x^3 - C)$$

MAT182 Prüfung HS08 - Aufgabe 2 (abgeändert)

Löse folgende Gleichung nach y auf:

$$\arctan(y) + 1 = \ln(x + 1) + C$$

Lösung:

$$y = \tan(\ln(x + 1) - 1 + C)$$

Löse folgende Gleichung nach y auf:

$$-\frac{1}{2y} = \sqrt{1 + x^2} + C$$

Lösung:

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{-2(\sqrt{1+x^2}+C)}}$$

MAT182 Prüfung HS07 - Aufgabe 4 (abgeändert)

Löse folgende Gleichung nach y auf:

$$2 - \frac{1}{y} = 4x + 1 + x^2 + C$$

Lösung:

$$y = \frac{1}{1 - 4x - x^2 - C} = \frac{-1}{x^2 + 4x - 1 + C}$$

HS14 - Ue12-A2:

Löse nach y auf und vereinfache: $\ln(y) = -\frac{1}{3} \ln(x^3 + 1) + C$

Lösung:

$$y = (x^3 + 1)^{-\frac{1}{3}} e^C = e^C \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$$

MAT182 Prüfung HS08 - Aufgabe 2

Löse folgende Gleichung nach x auf:

$$\frac{\pi}{2} + n\pi = \ln(x + 1)$$

Lösung:

$$x = e^{\frac{\pi}{2} + n\pi} - 1 = \exp\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) - 1$$

MAT182 Prüfung HS05 - Aufgabe 3

Löse folgende Gleichung nach K auf:

$$0 = 2 \cdot \frac{1 + Ke^{4 \arctan(0)}}{1 - Ke^{4 \arctan(0)}}$$

Lösung:

$$K = -1$$

MAT182 Prüfung HS04 - Aufgabe 3

Löse folgende Gleichung nach y auf, wobei $x > 2$ gilt:

$$\ln(|y|) = \ln(|x - 2|) + C$$

Lösung:

$$|y| = (x - 2)e^C \rightarrow y = K(x - 2)$$

MAT182 Rep-Prüfung HS04 - Aufgabe 2

Löse folgende Gleichung nach y auf, wobei $x > 0$ gilt:

$$\ln(|y|) = -\ln(|x|) + C$$

Lösung:

$$|y| = \left(\frac{1}{x}\right)e^C \rightarrow y = K \cdot \frac{1}{x} = \frac{K}{x}$$

MAT182 Rep-Prüfung HS05 - Aufgabe 3

Löse folgende Gleichung nach y auf:

$$\frac{1}{4} (\ln |y - 2| - \ln |y + 2|) = \arctan(x) + C$$

Lösung:

$$"e^C = K"-Trick für Betragsstriche \rightarrow y = 2 \cdot \frac{1 + Ke^{4 \arctan(x)}}{1 - Ke^{4 \arctan(x)}}$$

weitere Gleichungen / DGL-Algebra-Schritte:

HS14 - Ue12-A1:

$$f(x) = Ce^{\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}}. \text{ Löse}$$

a) $f(0) = 0$ b) $f(0) = 1$ nach C auf.

Lösung:

$$\text{a) } C = 0 \quad \text{b) } C = 1$$

HS14 - Ue8-A2:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C. \text{ Löse } f(4) = 2 \text{ nach } C \text{ auf.}$$

$$g(x) = \frac{x^2}{2} - \ln|x| + D. \text{ Löse } g(\sqrt{e}) = \frac{e}{2} \text{ nach } D \text{ auf.}$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + K. \text{ Löse } h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ nach } K \text{ auf.}$$

Lösung:

$$C = \frac{2}{3}, \quad D = \frac{1}{2}, \quad K = -\frac{1}{2}.$$

HS14 - Ue13-A1:

Löse $x = \frac{1}{2}(y+2)^3 - 1$ nach y auf.

Lösung:

$$y = \sqrt[3]{2x+2} - 2$$

HS14 - Ue13-A2:

$f(x) = Ce^{-\cos(x)} - 4$. Löse $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4$ nach C auf.

Lösung:

$$C = 0$$

HS14 - Ue13-A3:

Löse $\ln(y-4) - \ln(y+2) = -x$ nach y auf.

Lösung:

$$y = \frac{2(2+e^{-x})}{1-e^{-x}}$$

HS14 - Ue13-A3:

$f(x) = \frac{4e^x+2C}{e^x-C}$. Löse $f(0) = 0$ nach C auf.

Lösung:

$$C = -2$$

Schreibe den Term ohne negative Exponenten und vereinfache

1. $(-3)^{-4} =$

Lösung: $\frac{1}{81}$

2. $(-2x)^{-3} =$

Lösung: $\frac{-1}{8x^3}$

3. $8(-2x)^{-2} =$

Lösung: $\frac{2}{x^2}$

4. $\frac{3y^{-10}}{6} =$

Lösung: $\frac{1}{2y^{10}}$

5. $\frac{(2c)^{-6}}{0.5^2} =$

Lösung: $\frac{1}{16c^6}$

6. $\frac{3}{x^{-5}} =$

Lösung: $3x^5$

7. $\frac{4(xy)^{-1}}{(2x)^{-1}} =$

Lösung: $\frac{8}{y}$

8. $3x^{-1} \cdot \frac{1}{x^{-1} + 1} + (1 + x)^{-1} =$

Lösung: $\frac{4}{1+x}$

9. $\left(\frac{a^{-2}}{b}\right)^{-1} - \frac{b}{a^{-2}} =$

Lösung: 0

Potenzgesetze anwenden und vereinfachen

1. $0,3a^{-4} \cdot 0,1a^{-3} =$ Lösung: $0,03a^{-7}$

2. $(n+a)^{2x+3y} \cdot (n+a)^{4x-2y} =$ Lösung: $(n+a)^{6x+y}$

3. $b^{2a} \cdot b^{4a} =$ Lösung: b^{6a}

4. $8a^{6-5y} \cdot 3a^{2+6y} - 5a^{4+y} \cdot 6a^{2+3y} - (24a^{8+y} - 10a^{6+4y}) =$
Lösung: $-20a^{6+4y}$
 $= 24a^{8+y} - 30a^{6+4y} - 24a^{8+y} + 10a^{6+4y}$

5. $15a^3b^6(25b^8c - 8a^3b^2 + 9b^6x) =$ Lösung: $375a^3b^{14}c - 120a^6b^8 + 135a^3b^{12}x$

6. $2e^{-1} \cdot e^{3-x} + e(e^2 - 2^{-1}e^{-x+1}) =$ Lösung: $\frac{3}{2}e^{2-x} + e^3$
 $= 2e^{2-x} + e^3 - 0,5e^{2-x}$

7. $\frac{4x^2}{3y} \cdot \frac{aby^3}{16nx^3} =$ Lösung: $\frac{aby^2}{12nx}$

8. $\left(\frac{13a^7}{10x^5} : \frac{26a^4}{30x^8}\right) - \left(\frac{24a^3c}{13cx^4} : \frac{8}{26x^7}\right) =$ Lösung: $-\frac{9}{2}a^3x^3 = \frac{3}{2}a^3x^3 - 6a^3x^3$

9. $\frac{3^{n+1} + 3^n}{3^6 + 3^7} =$ Lösung: $3^{n-6} = \frac{3^n \cdot (1+3^1)}{3^6 \cdot (1+3^1)}$

10. $\frac{3n^{2a+3b}}{2n^{a+b}} + \frac{5n^{3b}}{10n^{b-a}} =$ Lösung: $2n^{a+2b} = \frac{3}{2}n^{a+2b} + \frac{1}{2}n^{2b+a}$

11. $\frac{3^a \cdot 4^a - 12^{a+1}}{6^a \cdot 2^{a-1}} =$ Lösung: -22
 $= \frac{12^a \cdot (1-12^1)}{12^a \cdot 2^{-1}} = \frac{-11}{0,5}$

12. $\left[\left(\frac{1}{1+a}\right)^4 : \left(\frac{1-a}{1}\right)^{-5}\right] \cdot \left(\frac{1-a}{a+1}\right)^{-4} =$ Lösung: $(1-a)$
 $= \frac{1 \cdot (1-a)^5 \cdot (1+a)^4}{(1+a)^4 \cdot 1 \cdot (1-a)^4}$
 $= \frac{1 \cdot 1 \cdot (1-a)^{-4}}{(1+a)^4 \cdot (1-a)^{-5} \cdot (1+a)^{-4}}$

13. $\left(\frac{4}{7}a^2\right)^{-3} =$ Lösung: $\frac{343}{64}a^{-6}$
 $= \left(\frac{7}{4}\right)^3 a^{-6}$

14. $\left(-\frac{a^2}{x}\right)^{-5} =$ Lösung: $-\frac{x^5}{a^{10}}$

15. $\left(\frac{a^{-3} \cdot b^4}{c^2x^{-2} \cdot b^0}\right)^{-3} =$ Lösung: $\frac{a^9c^6}{b^{12}x^6}$

16. $\left(\frac{2a^4}{3b^5}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2 : \left(\frac{2a}{3b}\right)^3 =$ Lösung: $\frac{a^5}{b^8} = a^5b^{-8}$
 $= \frac{8a^{12} \cdot b^4 \cdot 27b^3}{27b^{15} \cdot a^4 \cdot 8a^3}$

Binomische Formeln

1. $4 - a^2 =$

Lösung: $(2 - a)(2 + a)$

2. $\frac{1}{4}x^2 - 1 =$

Lösung: $(0.5x - 1)(0.5x + 1)$

3. $9b^3 - b =$

Lösung: $b(3b - 1)(3b + 1)$

4. $64n^2 - 25m^2 =$

Lösung: $(8n - 5m)(8n + 5m)$

5. $\frac{9}{4}a^2b^3 - \frac{25}{16}bx^2 =$

Lösung: $b(\frac{3}{2}ab + \frac{5}{4}x)(\frac{3}{2}ab - \frac{5}{4}x)$

6. $n^2 + nx + \frac{1}{4}x^2 =$

Lösung: $(n + \frac{1}{2}x)^2$

7. $2b^2 - 12b + 18 =$

Lösung: $2(b - 3)^2$

8. $-120ab^2 + 72ab + 50ab^3 =$

Lösung: $2ab(6 - 5b)^2$

9. $\frac{a^4}{256} - \frac{b^4}{81} =$

Lösung: $(\frac{a^2}{16} - \frac{b^2}{9})(\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{9})$
 $= (\frac{a}{4} - \frac{b}{3})(\frac{a}{4} + \frac{b}{3})(\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{9})$

10. $\left(\frac{3}{2}a^{x-1} - a^{x+3}\right)^2 =$

Lösung: $\frac{9}{4}a^{2x-2} - 3a^{2x+2} + a^{2x+6}$

y -Werte ausrechnen

HS14 - Ue6-A2:

$f(x) = x^4 - 4x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{20}{3}x - 5$. Bestimme $f(0), f(1), f(-2), f(3)$.

Lösung:

$$f(0) = -5, f(1) = 0, f(-2) = \frac{97}{3}, f(3) = -6$$

HS14 - Ue6-A3:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$. Berechne $f(0.0001)$.

Lösung:

$$f(0.0001) = 10^8$$

HS14 - Ue7-A2:

$f(t) = \sqrt{8t^2 - 4t + 2}$. Bestimme $|f(0)|, |f(2)|, |f(\frac{1}{4})|$.

Lösung:

$$|f(0)| = \sqrt{2}, |f(2)| = \sqrt{26}, |f(\frac{1}{4})| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

HS14 - Ue7-A4:

$f(t) = 3t^2 - 1, g(t) = 3t^3 - t$. Bestimme $f(0), g(0), f(-\frac{1}{3}), g(-\frac{1}{3}), f(-1), g(-1), f(\frac{1}{\sqrt{3}}), g(-\frac{1}{\sqrt{3}})$.

Lösung:

$$f(0) = -1, g(0) = 0, f(-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}, g(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}, f(-1) = 2, g(-1) = -2, f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 0, g(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = 0.$$

HS14 - Ue8-A3:

$f(x) = 6x - 4$. Ist $f(\frac{2+\sqrt{7}}{3}) > 0$? $f(\frac{2-\sqrt{7}}{3}) > 0$?

Lösung:

$$f(x) = 6x - 4. \text{ Ist } f(\frac{2+\sqrt{7}}{3}) > 0 \quad f(x) = 6x - 4. \text{ Ist } f(\frac{2+\sqrt{7}}{3}) < 0$$

Vereinfachen

ETH Farkas-Prüfung Wi16 Aufgabe 3c

Vereinfach so weit wie möglich: $Ke^{3\ln(x)}$

Lösung:

$$Kx^3$$

ETH Caspar-Prüfung Wi17 Aufgabe 3c

Vereinfach so weit wie möglich: $Ke^{\frac{1}{2}\ln(x)}$

Lösung:

$$K\sqrt{x}$$

MAT182 Prüfung HS04 - Aufgabe 3

Vereinfach so weit wie möglich: $\sqrt{b^2 + \frac{b^2}{\lambda^2 - 1}}$

Lösung:

$$\frac{\lambda b}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$$

HS14 - Ue2-A4:

Vereinfach so weit wie möglich: $\frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}[(2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2(1 - \cos^2(x))\cos(x)]$

Lösung:

$$\cos^3(x)$$

HS14 - Ue3-A4:

Vereinfach so weit wie möglich: $\frac{(1-2x_0) - (1-2(x_0+h))}{(1-2x_0)^2 h}$

Lösung:

$$\frac{2}{1-2x_0)^2}$$

HS14 - Ue13-A3:

Vereinfache so weit wie möglich: $-\frac{1}{6} \left[\frac{4e^x + 2C}{e^x - C} - 4 \right] \left[\frac{2(2e^x + C)}{e^x - C} + 2 \right]$

Lösung:

$$\frac{-6Ce^x}{(e^x - C)^2}$$

HS14 - Ue12-A1:

Sei $y = Ke^x$.

a) Setze $K = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$ ein und vereinfache / bestimme y .

b) Löse $y(0) = -1$ nach C auf.

Lösung:

$$\text{a) } y = Ce^x - (x^2 + 2x + 2) \quad \text{b) } C = 1$$

weitere Gleichungs-Aufgaben

HS14 - Ue2-A2:

$$4(3 + 4t) - 4(5t) - 4t = -4$$

Lösung:

$$t = 2$$

HS14 - Ue5-A3:

$$\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} = 0$$

Lösung:

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{6}{5}$$

HS14 - Ue7-A1:

$$\frac{36t^3 + 60t}{2\sqrt{9t^4 + 30t^2 + 5}} = 0$$

Lösung:

$$t_1 = 0$$

HS14 - Ue1-A2:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Lösung:

$$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$$

HS14 - Ue8-A3:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^3 + x^2 - 2x$$

Lösung:

$$x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 1$$

HS14 - Ue11-A3:

$$\text{a) } y^2 + y - 2 = 0 \quad \text{b) } x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Lösung:

$$\text{a) } y_1 = -2, y_2 = 1 \quad \text{b) } x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$$

HS14 - Ue12-A3:

Lösen nach t auf: $U_0 - U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0}{2}$

Lösung:

$$t = RC \ln(2)$$

HS14 - Ue1-A2: (*)

$$5^{4x} - 7 \cdot 5^{2x} + 10 = 0$$

Lösung:

$$x_1 = \frac{\log(2)}{2 \cdot \log(5)}, x_2 = \frac{1}{2}$$

HS14 - Ue1-A4:

$$\frac{2x^2}{2x^2+3x-9} = -\frac{x}{2}$$

Lösung:

$$0, 1, -\frac{9}{2}$$

HS14 - Ue6-A1:

$$4x^3 - 12x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{20}{3} = 0$$

Lösung:

$$x_1 = 1, x_2 = 1 - \sqrt{\frac{8}{3}}, x_3 = 1 + \sqrt{\frac{8}{3}}$$