MathCourses
www.mathcourses.ch/mat141.html

Vorarbeit MAT141 PVK

Playlist Zusatz-Video

Grundlagenoperationen

(vom Mathe 2 Crash Kurs)

Homepage / Webseite:

`www.mathcourses.ch/mat141.html`

Lernkärtchen: Grundlagenoperationen

Crash-Kurse & PVK-Unterlagen: *www.mathcourses.ch/mathe2.html*

Matrizen multiplizieren (möglich?):

Welche der Matrizen AB, BA kann gebildet werden?

A hat Ordnung $s \times n$ (Anzahl Zeilen × Anzahl Spalten)

B hat Ordnung $n \times r$.

$$\begin{array}{c} A \quad \cdot \quad B \\ \underbrace{[s \times \underbrace{\boxed{n}] \quad [\boxed{n}}_{\text{verkettbar}} \times r]}_{[s\times r]} \end{array} \qquad \begin{array}{c} B \quad \cdot \quad A \\ \underbrace{[n \times \underbrace{{\color{blue}r}] \quad [{\color{orange}s}}_{\text{nicht verkettbar}} \times n]}_{\text{existiert nicht}} \end{array}$$

Crash-Kurse & PVK-Unterlagen: *www.mathcourses.ch/mathe2.html*

Regeln für Inverse und Transponierte:

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & A^T \\ [s \times n] & & [n \times s] \end{array} \qquad (A^T)^T = A, \ (A^{-1})^{-1} = A$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(AB^TC)^T = C^TBA^T$$

Reihenfolge rückwärts (bei Transponierte oder Inverse von Produkten)

Crash-Kurse & PVK-Unterlagen: *www.mathcourses.ch/mathe2.html*

Matrizenmultiplikation via Falkscher Anordnung:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \qquad RS = ?$$

Falksche Anordnung:

$$\begin{array}{cccc|cc} & & & S: & 3 & -3 \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & 5 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 22 & -15 \\ R: & -3 & 1 & 0 & -7 & 9 \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{RS}$$

$[2 \times 3] \cdot [3 \times 2] \rightarrow [2 \times 2]$

Prüfung FS08 - Aufgabe 4 Teil 1

(b) Schreiben Sie für invertierbare Matrizen P, Q, R der Ordnung n die Matrix $(PQR)^{-1}P$ als ein Produkt, in dem nur die Matrizen P^{-1}, Q^{-1} oder R^{-1} vorkommen dürfen.

$$\underleftarrow{(PQR)^{-1}}\,P = \underline{(R^{-1}Q^{-1}P^{-1})}\,P = R^{-1}Q^{-1} \cdot \underset{P^{-1}P = I_n}{I_n} = R^{-1}Q^{-1}$$

Prüfung FS09 - Aufgabe 1 Teil 1

(ii) Es seien P, Q, R reguläre Matrizen der Ordnung n und X, Y unbekannte Matrizen, die den Gleichungen $PXQ = Q^{-1}R$ bzw. $PY = QR$ genügen. Bestimmen Sie

X $\qquad\qquad$ Y^{-1}

$PXQ = Q^{-1}R$ | P links weg: links mal P^{-1}

$P^{-1}PXQ = P^{-1}Q^{-1}R \longrightarrow XQ = P^{-1}Q^{-1}R$ | rechts $\cdot\, Q^{-1}$

$XQQ^{-1} = P^{-1}Q^{-1}RQ^{-1}$

$\Rightarrow X = P^{-1}Q^{-1}RQ^{-1}$

$PY = QR$

$P^{-1}PY = P^{-1}QR \longrightarrow Y = P^{-1}QR$

$(Y)^{-1} = (P^{-1}QR)^{-1}$

$Y^{-1} = R^{-1}Q^{-1}\underset{\setminus (P^{-1})^{-1}}{P}$

Reihenfolge kehrt bei $(\ \ )^{-1}$ sowie $(\ \ )^T$

Prüfung FS12 - Aufgabe 2.1:

i) Berechnen Sie das Produkt AB der Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Falls das Produkt nicht gebildet werden kann, schreiben Sie "existiert nicht".

Kann das Produkt gebildet werden?

Falls $[r \times n] \cdot [n \times s] = [r \times s]$

Anzahl Spalten links — gleich — Anz Zeilen rechts

$A \cdot B$ → geht (existiert)

$[2 \times 3]$ $[3 \times 2]$

2 Zeilen, 3 Spalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

via Falksche Anordnung:

$$\underset{\overset{\shortparallel}{C}}{A \cdot B} \text{ ausrechnen: } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1+1 & 2+1+1 \\ -1+2+2 & -1-2+2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}}$$

Prüfung FS11 - Aufgabe 2.3:

Berechnen Sie, soweit möglich (andernfalls schreiben Sie "existiert nicht"), für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

das Produkt AB, die Inverse A^{-1} von A und die Summennorm $||B^T\underline{x}||_1$ von $B^T\underline{x}$:

Tipps: $||\underline{z}||_1 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|$ für $\underline{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$, B^T ist die Transponierte von B.

$A \cdot B$ existiert nicht

$[3 \times 3]$ $[2 \times 3]$

$3 \neq 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = B^T \qquad x = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = B^T x,$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$[3 \times 2]$ $[2 \times 1]$

geht

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_1 = |3| + |0| + |3| = 6$$

Prüfung FS08 - Aufgabe 3 Teil 1:

Gegeben sind die Matrix C und der Spaltenvektor $\underline{x}$ wie folgt:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Bestimmen Sie die Ordnung $m \times n$ (d.h. Anzahl der Zeilen × Anzahl der Spalten) für die folgenden Matrizen bzw. schreiben Sie "nicht", wenn die Matrix nicht gebildet werden kann:

Matrix	CC	C^TC	$\underline{x}^TC^T$	$\underline{x}\underline{x}^T$
$m \times n$				

C $[3 \times 4]$ $\quad$ x $[4 \times 1]$ $\quad$ x^T $[1 \times 4]$ $\quad$ C^T $[4 \times 3]$

$C \cdot C$ $\quad$ $[3 \times 4]$ ✗ $[3 \times 4]$ → geht nicht

$C^T \cdot C$ $\quad$ $[4 \times 3]$ ✓ $[3 \times 4]$ → geht: $[4 \times 4]$

$x^T \cdot C^T$ $\quad$ $[1 \times 4]$ ✓ $[4 \times 3]$ → geht: $[1 \times 3]$

$x \cdot x^T$ $\quad$ $[4 \times 1]$ ✓ $[1 \times 4]$ → geht: $[4 \times 4]$

Prüfung FS10 - Aufgabe 4.2:

Gegeben Sind die Matrizen

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Ordnung $m \times n$ (d.h. Anzahl der Zeilen × Anzahl der Spalten) für folgende Matrizen bzw. schreiben Sie "nicht", wenn die Matrix nicht definiert ist:

Matrix	PQ	QP	P^TQ^TQ	$(QQ^T)^{-1}$
$m \times n$				

P $[3 \times 4]$ $\quad$ P^T $[4 \times 3]$ $\quad$ Q $[2 \times 3]$ $\quad$ Q^T $[3 \times 2]$

PQ geht nicht

QP geht und hat Ordnung $[2 \times 4]$

P^TQ^TQ geht und hat Ordnung $[4 \times 3]$

$[4 \times 3][3 \times 2][2 \times 3]$ ✓ ✓

$(QQ^T)^{-1}$ geht und hat Ordnung $[2 \times 2]$

$\underbrace{[2 \times 3][3 \times 2]}_{[2 \times 2]}$ ✓

$[2 \times 2]$ ist quadratisch (falls regulär invertierbar)

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$\det(QQ^T) = 30 - 9 = 21 \neq 0$ → Inverse existiert

Von den Wirtschafts-Studenten Mathe 2-VL

Prüfungs-Aufgaben:

(siehe nächste Seite(n))

FS22	FS21	FS20	FS19
1.2	1.3	1.3	2.4
2.1		2.4	2.6
7			

FS19:

Aufgabe 2.4 - Einfachauswahl (2 Punkte)

Es seien weiterhin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und zudem $C = A \cdot B$ mit $C = (c_{ij})$.

Der Wert c_{41} ist gleich

○ 0	○ 4	○ 8	○ 19
○ 1	○ 7	○ 16	○ keine dieser Antworten

Aufgabe 2.6 - Wahr oder Falsch (4 Punkte)

Es sei weiterhin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

und $C = A \cdot B$. Des Weiteren bezeichne I die Einheitsmatrix der Ordnung 4.

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

a) Es gilt $A \cdot B = B \cdot A$.	☐ wahr	☐ falsch
b) Es gilt $5A \cdot I \cdot B + I \cdot 3A \cdot B = 8A \cdot B \cdot I$.	☐ wahr	☐ falsch
c) Es gilt $C^T = A^T \cdot B^T$.	☐ wahr	☐ falsch
d) Es gilt $B^{-1} \cdot C = A$.	☐ wahr	☐ falsch

FS20:

Aufgabe 1.3 Einfachauswahl (2P)

Es seien weiterhin $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

Es sei $C = A \cdot B$ mit $C = (c_{ij})$. Welchen Wert hat c_{12}?

○ 56	○ 36	○ 14	○ Diese Matrizenmultiplikation ist nicht definiert.
○ 20	○ 12	○ 22	○ keine dieser Antworten

Aufgabe 2.4 Einfachauswahl (2P)

Es seien A, B und C invertierbare $m \times m$ Matrizen, $m \in \mathbb{N}$.
Lösen Sie $A \cdot B \cdot X = C$ nach X auf. Welcher der folgenden Ausdrücke entspricht X?

○ $A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C$	○ $A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$	○ $B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C$	○ $C \cdot A^{-1} \cdot B^{-1}$
○ $C \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$	○ $B^{-1} \cdot C \cdot A^{-1}$	○ $A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}$	○ keine dieser Antworten

---

Antwort: FS19 2.4: 4 2.6: fwff FS20 1.3: 20 2.4: $B^{-1}A^{-1}C$

FS21:

Aufgabe 1.3 Einfachauswahl (2P)

Es seien weiterhin $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ gegeben.

Des Weiteren sei $C = B \cdot A$ mit $C = (c_{ij})$.
Welchen Wert hat c_{12} ?

○ 52 ○ 62 ○ 42 ○ 26
○ 31 ○ 21 ○ 24 ○ keine dieser Antworten

FS22:

Aufgabe 1.2 Wahr oder Falsch (4P)

Gegeben ist weiterhin die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 6 \\ a & 1 & 4 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Zusätzlich ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ b & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$ gegeben. Des Weiteren sei $C = A \cdot B$ mit $C = (c_{ij})$.

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

Es gilt $c_{12} = -10$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.	☐ wahr	☐ falsch
C ist eine 2×3-Matrix.	☐ wahr	☐ falsch
Wenn $b = 2$ ist, dann gilt $\operatorname{rang}(B) = 2$.	☐ wahr	☐ falsch
Es gilt $A^T \cdot B = B^T \cdot A$.	☐ wahr	☐ falsch

Aufgabe 2.1 Einfachauswahl (2P)

Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$, wobei $c \in \mathbb{R}$.

Für welchen Wert $c \in \mathbb{R}$ gilt $(\mathbf{v}^1)^T \cdot \mathbf{w} = 10$?

○ -8
○ -2
○ -1
○ 0
○ 2
○ 4
○ 8
○ keine dieser Antworten

Aufgabe 7 Freitext (2P)

Gegeben seien die regulären Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und I bezeichne die Einheitsmatrix der Ordnung n. Des Weiteren ist bekannt, dass die Gleichung $A + I = C^{-1}$ gilt. Lösen Sie die folgende Gleichung nach der Matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ auf:

$$AXB^{-1} + XB^{-1} = I.$$

Tippen Sie Ihre Antwort in das folgende Antwortfeld, und geben Sie alle notwendigen Zwischenschritte an (Antworten ohne Lösungsweg geben keine Punkte). Hinweis zum Eintippen: Zum Beispiel der Term AXB^{-1} kann so eingetippt werden: `AXB^(-1)`.

Antwort: FS21 1.3: 62 FS22 1.2: wfwf 2.1: -1 7: CB