MAT141 PVK

Verständnis- / Theoriefragen

(Honours-Übungsaufgaben)

Homepage / Webseite:

`www.mathcourses.ch/mat141.html`

HONOURS 2

Exercise 4 (2 points)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen *Wahr* oder *Falsch* sind und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) (1 point) Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ besitzt Lösungen in $\mathbb{R}$.

(b) (1 point) Es existieren reelle Zahlen $a,\ b,\ c,\ d$, so dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

genau eine Lösung besitzt.

HONOURS 3

Exercise 4 (2 points)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen *Wahr* oder *Falsch* sind und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) (1 point) Ist ein lineares Gleichungssystem unterbestimmt (weniger Gleichungen als Unbekannte), hat es immer unendlich viele Lösungen.

(b) (1 point) Ein homogenes, lineares Gleichungssystem besitzt immer mindestens eine Lösung.

HONOURS 4

Exercise 4 (2 points)
Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen Wahr oder Falsch sind. Falls Wahr, begründen Sie Ihre Antwort und falls Falsch, geben Sie ein Gegenbeispiel.
Seien A, B, C beliebige 2×2 Matrizen.

1. Wenn A und B symmetrisch sind, dann ist auch AB symmetrisch.
2. Wenn A, B, C invertierbar sind, dann ist auch ABC invertierbar.

HONOURS 5

Exercise 4 (2 points)
Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen Wahr oder Falsch sind und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) (1 point) Das Quadrat einer symmetrischen Matrix ist immer symmetrisch.

(b) (1 point) Wenn A, B invertierbare $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$ sind, dann gilt $B^T(B(BA^T)^T)^{-1}BA = Id_n$.

HONOURS 6

Exercise 4 (2 points)

Bestimmen Sie ob die folgenden Aussagen Wahr oder Falsch sind und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) (1 point) Es gilt $(1-i)^{-8} = \frac{1}{16}$.

(b) (1 point) Es gilt $i = e^{-i\pi/2}$.

HONOURS 7

Exercise 4 (4 points)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume sind? Falls Ja, begründen Sie Ihre Antwort. Falls Nein, geben Sie ein Gegenbeispiel.

(a) (1 point) $W_1 = \{(b_1, b_2, b_3) : b_1 = 1\}$.

(b) (1 point) $V_1 = \{(b_1, b_2, b_3) : b_2 b_3 = 0\}$.

(c) (1 point) $V_2 = \{$Alle Linearkombinationen der Vektoren $(1, 1, 0)$ und $(2, 0, 1)\}$.

(d) (1 point) $L = \{(b_1, b_2, b_3) : b_3 - b_2 + 3b_1 = 0\}$.

HONOURS 8

Exercise 3 (2 points)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen Wahr oder Falsch sind, und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) (1 point) Seien A, B zwei Unterräume von $\mathbb{R}^3$. Dann ist $A \cap B$ wieder ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

(b) (1 point) Die Nullabbildung $0 : V \to W$, welches jedes Element $v \in V$ zu $0 \in W$ schickt, ist linear.

HONOURS 9

Exercise 4 (2 points)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen Wahr oder Falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

1. (1 point) Wenn $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal sind, dann ist auch $A + B$ orthogonal.
2. (1 point) Wenn $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal sind, dann ist auch AB orthogonal.

HONOURS 10

Exercise 4 (2 points)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen Wahr oder Falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) (1 points) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und seien $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $\mu \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von B. Dann ist $\lambda + \mu$ ein Eigenwert von $A + B$.

(b) (1 points) Für alle $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ haben A und A^{T} den gleichen Eigenraum.

HONOURS 11

Exercise 4 (2 points)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen Wahr oder Falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Sei A eine 3×3 Matrix mit den Eigenwerten 1, 1, 2. Dann ist A invertierbar.

(b) Eine quadratische Form ist entweder positiv definit, negativ definit oder indefinit.

HONOURS 13

Exercise 4 (2 points)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen Wahr oder Falsch sind, und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) (1 point) Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $e^{A+B} = e^A e^B$.

(b) (1 point) Sei H ein inhomogenes, lineares Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t) + f(t)$, und seien $y_1(t), y_2(t)$ zwei Lösungen von H. Dann ist $y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$ auch eine Lösung von H.

MathCourses

www.mathcourses.ch/mat141.html

MAT141 PVK

Lösungen

Verständnis- / Theoriefragen

(Honours-Übungsaufgaben)

HONOURS 2

Exercise 4 (2 points)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen *Wahr* oder *Falsch* sind und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) (1 point) Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ besitzt Lösungen in $\mathbb{R}$.

(b) (1 point) Es existieren reelle Zahlen $a,\ b,\ c,\ d$, so dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

genau eine Lösung besitzt.

Lösung:

(a) Falsch. Die Gleichung oben ist äquivalent zu $x^2 = -1$, welches von keinem $x \in \mathbb{R}$ erfüllt werden kann.

(b) Wahr. Wenn $ad \neq bc$ gilt, dann hat das System genau eine Lösung. Beispiel: Wähle $a = 7$, $b = 2$, $c = 5$ und $d = 4$, dann hat das System genau eine Lösung (bei 2 (a) berechnet).

HONOURS 3

Exercise 4 (2 points)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen *Wahr* oder *Falsch* sind und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) (1 point) Ist ein lineares Gleichungssystem unterbestimmt (weniger Gleichungen als Unbekannte), hat es immer unendlich viele Lösungen.

(b) (1 point) Ein homogenes, lineares Gleichungssystem besitzt immer mindestens eine Lösung.

Solution:

(a) Falsch. Ein unterbestimmtes System kann auch keine Lösung haben.
Gegenbeispiel:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ 0 & = 1 \end{cases}$$

Offensichtlich besitzt dieses unnterbestimmtes, lineares Gleichungssystem keine Lösung.

(b) Wahr. Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat die Form $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Offensichtlich erfüllt die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ immer die Gleichung und ist somit eine Lösung.

HONOURS 4

Exercise 4 (2 points)
Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen Wahr oder Falsch sind. Falls Wahr, begründen Sie Ihre Antwort und falls Falsch, geben Sie ein Gegenbeispiel.
Seien A, B, C beliebige 2×2 Matrizen.

1. Wenn A und B symmetrisch sind, dann ist auch AB symmetrisch.
2. Wenn A, B, C invertierbar sind, dann ist auch ABC invertierbar.

Solution:

1. Falsch. Betrachten wir $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Wahr. Wenn A, B, C invertierbar sind, dann gilt $\det(A), \det(B)$ und $\det(C)$ sind ungleich Null. Also gilt $\det(ABC) = \det(A)\det(B)\det(C) \neq 0$, und somit ist ABC invertierbar.

HONOURS 5

Exercise 4 (2 points)
Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen Wahr oder Falsch sind und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) (1 point) Das Quadrat einer symmetrischen Matrix ist immer symmetrisch.

(b) (1 point) Wenn A, B invertierbare $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$ sind, dann gilt $B^T(B(BA^T)^T)^{-1}BA = Id_n$.

Solution:

(a) Wahr. Sei A eine symmetrische Matrix, d.h. $A = A^T$. Dann folgt:

$$(A^2)^T = (AA)^T = A^T A^T \overset{A=A^T}{=} AA = A^2$$

Somit ist A^2 symmetrisch.

(b) Wahr. Ausrechnen liefert:

$$\begin{aligned} B^T(B(BA^T)^T)^{-1}BA &= B^T(BAB^T)^{-1}BA \\ &= \underbrace{B^T(B^T)^{-1}}_{\mathrm{Id}_n}\underbrace{(BA)^{-1}BA}_{\mathrm{Id}_n} \\ &= \mathrm{Id}_n. \end{aligned}$$

HONOURS 6

Exercise 4 (2 points)

Bestimmen Sie ob die folgenden Aussagen Wahr oder Falsch sind und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) (1 point) Es gilt $(1-i)^{-8} = \frac{1}{16}$.

(b) (1 point) Es gilt $i = e(-\pi/2)$.

Solution:

(a) Wahr. Aus $1 - i = \sqrt{2}e(-\pi/4)$ folgt $\frac{1}{1-i} = \frac{1}{\sqrt{2}}e(\pi/4)$. Somit haben wir

$$(1-i)^{-8} = \frac{1}{2^{\frac{8}{2}}}e(8\pi/4) = \frac{1}{16}.$$

(b) Falsch.

$$e(-\pi/2) = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) = -i.$$

Exercise 4 (4 points)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume sind? Falls Ja, begründen Sie Ihre Antwort. Falls Nein, geben Sie ein Gegenbeispiel.

(a) (1 point) $W_1 = \{(b_1, b_2, b_3) : b_1 = 1\}$.

(b) (1 point) $V_1 = \{(b_1, b_2, b_3) : b_2 b_3 = 0\}$.

(c) (1 point) $V_2 = \{$Alle Linearkombinationen der Vektoren $(1, 1, 0)$ und $(2, 0, 1)\}$.

(d) (1 point) $L = \{(b_1, b_2, b_3) : b_3 - b_2 + 3b_1 = 0\}$.

Solution:

(a) Nein.
$\vec{0} = (0, 0, 0) \notin W_1$.

(b) Nein.
Wählen wir $(1, 1, 0)$ und $(1, 0, 1) \in V_1$, erhalten wir

$$(1, 1, 0) + (1, 0, 1) = (2, 1, 1) \notin V_1.$$

(c) Ja.
Alle Linearkombinationen von $(1, 1, 0)$ und $(2, 0, 1)$ sind gegeben durch

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Dann kann V_2 geschrieben werden als $V_2 = \{((a + 2b), a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ und wir können überprüfen, dass alle Bedingungen für einen Unterraum erfüllt sind:

1') $\vec{0} = (0, 0, 0) \in V_2$ (wähle $a = b = 0$).

2') Seien $(a_1 + 2b_1, a_1, b_1)$ und $(a_2 + 2b_2, a_2, b_2) \in V_2$. Dann gilt:

$$(a_1 + 2b_1, a_1, b_1) + (a_2 + 2b_2, a_2, b_2) = ((a_1 + a_2) + 2(b_1 + b_2), a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in V_2.$$

(In der Tat: Wähle $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$, dann sind $a, b \in \mathbb{R}$).

3') $\forall (a_1 + 2b_1, a_1, b_1) \in V_2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt

$$\lambda(a_1 + 2b_1, a_1, b_1) = (\lambda a_1 + 2\lambda b_1, \lambda a_1, \lambda b_1) \in V_2.$$

In der Tat, denn $\lambda a_1, \lambda b_1 \in \mathbb{R}$.

(d) Ja.

1') $\vec{0} = (0, 0, 0) \in L$ (wähle $b_1 = b_2 = b_3 = 0$).

2') Seien (b_{11}, b_{21}, b_{31}) und $(b_{12}, b_{22}, b_{32}) \in L$. Dann gilt

$$(b_{11}, b_{21}, b_{31}) + (b_{12}, b_{22}, b_{32}) = (b_{11} + b_{12}, b_{21} + b_{22}, b_{31} + b_{32}) \in L.$$

In der Tat, denn für $b_1 = b_{11} + b_{12}, b_2 = b_{21} + b_{22}, b_3 = b_{31} + b_{32}$ gilt $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$.

3') $\forall (b_1, b_2, b_3) \in L$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda(b_1, b_2, b_3) = (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3) \in \mathbb{R}^3,$$

und $\lambda b_3 - \lambda b_2 + 3\lambda b_1 = \lambda(b_3 - b_2 + 3b_1) = \lambda \cdot 0 = 0$. Somit folgt $\lambda(b_1, b_2, b_3) \in L$.

HONOURS 8

Exercise 3 (2 points)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen Wahr oder Falsch sind, und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) (1 point) Seien A, B zwei Unterräume von $\mathbb{R}^3$. Dann ist $A \cap B$ wieder ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

(b) (1 point) Die Nullabbildung $0 : V \to W$, welches jedes Element $v \in V$ zu $0 \in W$ schickt, ist linear.

Solution:

(a) Wahr. Seien $x, y \in A \cap B$, d.h. $x, y \in A$. Da A ein Unterraum ist, folgt $x + y, \lambda x \in A \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Analog folgt $x + y, \lambda x \in B \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Somit sind $x + y, \lambda x \in A \cap B \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Also ist $A \cap B$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

(b) Wahr, denn für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$f(x + y) = 0 = 0 + 0 = f(x) + f(y),$$
$$f(\alpha x) = 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha f(x).$$

HONOURS 9

Exercise 4 (2 points)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen Wahr oder Falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

1. (1 point) Wenn $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal sind, dann ist auch $A + B$ orthogonal.
2. (1 point) Wenn $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal sind, dann ist auch AB orthogonal.

Solution:

1. Falsch. Gegenbeispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   sind beide orthogonale Matrizen, da $A^T A = I$ und $B^T B = I$. Jedoch ist $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, was nicht orthogonal ist (es ist die Nullmatrix).

2. Wahr.
   Seien A und B orthogonale Matrizen, das heißt $AA^T = I$ und $BB^T = I$. Dann gilt für das Produkt AB:

$$(AB)(AB)^T = ABB^T A^T = AIA^T = AA^T = I.$$

   Damit ist auch AB orthogonal.

HONOURS 10

Exercise 4 (2 points)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen Wahr oder Falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) (1 points) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und seien $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $\mu \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von B. Dann ist $\lambda + \mu$ ein Eigenwert von $A + B$.

(b) (1 points) Für alle $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ haben A und A^{T} den gleichen Eigenraum.

Solution:

1. Falsch.
   Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $A + B = \mathrm{Id}_{2\times 2}$. Offensichtlich ist 1 ein Eigenwert von A und von B, aber $1 + 1 = 2$ ist nicht ein Eigenwert von $\mathrm{Id}_{2\times 2}$.

2. Falsch.
   Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dann ist $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\lambda_1 = 0$ ist der einzige Eigenwert von A und A^{T}. Ausserdem ist $v^{(1)} = (1, 0)^{\mathrm{T}}$ ist ein Eigenvektor von A und $E_{\lambda_1}(A) = \{\alpha(1, 0)^{\mathrm{T}} \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ der Eigenraum zu λ_1. Aber der Eigenraum $E_{\lambda_1}(A^{\mathrm{T}})$ ist $E_{\lambda_1}(A^{\mathrm{T}}) = \{\alpha(0, 1)^{\mathrm{T}} \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$.

HONOURS 11

Exercise 4 (2 points)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen Wahr oder Falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Sei A eine 3×3 Matrix mit den Eigenwerten 1, 1, 2. Dann ist A invertierbar.

(b) Eine quadratische Form ist entweder positiv definit, negativ definit oder indefinit.

Solution:

(a) Wahr, da $\det(A) = \prod_i \lambda_i = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \neq 0$.

(b) Falsch. Die zu der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gehörende quadratische Form ist weder positiv definit, noch negativ definit oder indefinit, da Null der einzige Eigenwert der Matrix ist. Alternativ kann man bemerken, dass $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ obwohl $(0, 1) \neq (0, 0)$.

HONOURS

Exercise 4 (2 points)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen Wahr oder Falsch sind, und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) (1 point) Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $e^{A+B} = e^A e^B$.

(b) (1 point) Sei H ein inhomogenes, lineares Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t) + f(t)$, und seien $y_1(t), y_2(t)$ zwei Lösungen von H. Dann ist $y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$ auch eine Lösung von H.

Solution:

(a) (1 point) Falsch. Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Addition erhalten wir

$$(A+B)^2 = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: C.$$

Also,

$$e^{(A+B)t} = \mathrm{Id} + \left(\sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{n!} \right) C = \mathrm{Id} + (e^t - 1)C = \begin{pmatrix} e^t & e^t - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da $A^2 = A$ und $B^2 = B$, schließen wir weiter

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e^{tB} = \mathrm{Id} + tB = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich gilt

$$e^{tA}e^{tB} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) (1 point) Falsch. Betrachten Sie das folgende Gegenbeispiel für $n = 1$.

$$y'(t) = y(t) + 1.$$

Die allgemeine Lösung lautet $y(t) = Ce^t - 1$ für jedes $C \in \mathbb{R}$. Insbesondere können wir $y_1(t) = y_2(t) = e^t - 1$ wählen. Dann haben wir

$$y_3'(t) = (y_1(t) + y_2(t))' = (2e^t - 2)' = 2e^t \neq 2e^t - 1 = (y_1(t) + y_2(t)) + 1.$$

Daher erfüllt y_3 das System *nicht*.