MAT141 PVK

"Lineare Algebra"

Lernkärtchen

(HS26)

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat141.html

Wichtige Zusammenhänge:

Für eine quadratische $[n \times n]$ Matrix A gilt:

$\det(A) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ A ist invertierbar

$\Leftrightarrow$ A ist regulär $\Leftrightarrow r(A) = n$ $\quad$ $r(A) \mathrel{\hat=}$ Anz. linear unabh. Vektoren

$\Leftrightarrow$ Zeilen- und Spaltenvektoren von A

sind linear unabhängig

Einige Rechenregeln für Determinanten:

Für quadratische $[n \times n]$ Matrizen A, A^{-1}, B gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \rightarrow \quad \det(A^m) = \Big(\det(A)\Big)^m$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \qquad \det(A^T) = \det(A)$$

A eine $[n\text{x}n]$ Matrix $\rightarrow \det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

Determinante einer 2x2 Matrix

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definieren wir

$\det A = a \cdot d - c \cdot b$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 4 = 3 + 4 = 7$$

Determinante einer 3x3 Matrix

Regel von Sarrus:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. - \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Beispiel:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right. = 0 + 2 + 0 - 0 - 0 - (-4) = 6$$

Determinante mit Entwicklungssatz von Laplace:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$$

- Beispiel: Entwicklungssatz von Laplace:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 1 \cdot (2) - 2 \cdot (-2) = 6$

Inverse einer Matrix berechnen:

Inverse einer 2x2 Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse einer $n\text{x}n$ Matrix:

$(A \mid \mathrm{Id}_{n\times n})$ umformen zu $(\mathrm{Id}_{n\times n} \mid A^{-1})$

Gauss-Umformungen und Determinante:

- Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren:
  $\rightarrow$ Determinante bleibt gleich
  (analog bei Spalten)
- Vertauschen zweier Zeilen:
  $\rightarrow$ Determinante ändert das Vorzeichen!
- Multiplizieren einer Zeile mit λ:
  $\rightarrow$ Determinante wird $\cdot\lambda$ vergrössert!

Rechenregeln für Inverse und Transponierte:

- Inverse: $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
  $\rightarrow$ (Reinehfolge umgekehrt)
- Transponierte: $(ABC)^T = C^T B^T A^T$
  $\rightarrow$ (Reinehfolge umgekehrt)
- $(A^{-1})^{-1} = A \qquad (B^T)^T = B$

Beispiel LGS lösen: 1. Erweiterte Matrix

Gleichungssystem:

$$\overbrace{\begin{aligned} x_1 \; - \; x_2 \qquad & \\ 2x_1 \; - \; 2x_2 \; + \; 3x_3 & \\ - \; 3x_2 \; + \; 9x_3 & \end{aligned}}^{A \cdot x} \; \overbrace{\begin{aligned} &= 1 \\ &= 5 \\ &= 0 \end{aligned}}^{= b}$$

$\Longrightarrow$ erweiterte Matrix $(A|b)$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \end{array}\right)$

Beispiel: 2. Zeilenstufenform + 3. Gl. lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{|c|} \hline \mathrm{Z2} - 2 \cdot \mathrm{Z1} \\ \hline Z3 : (-3) \\ \hline \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{|c|} \hline \mathrm{Z2} \leftrightarrow \mathrm{Z3} \\ \hline \mathrm{Z3} + \mathrm{Z2} \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{|c|} \hline \mathrm{Z1} + \mathrm{Z2} \\ \hline \mathrm{Z2} \leftrightarrow \mathrm{Z3} \\ \hline \mathrm{Z3} : (-3) \\ \hline \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)}_{r(A)=3 \text{ "pivots"}} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 4 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Rang von $A = r(A) =$ Anzahl "Führende Stellen" (in Zeilenstufenform)

$\Rightarrow L = \{(4,3,1)\}$ mit $\dim(L) = n - r = 3 - 3 = 0$

Dimension der Lösungsmenge eines LGS

dim L = n − r = "Anzahl Variablen - Anzahl pivots"

$\widehat{=}$ **Anzahl frei wählbarer Parameter**

LGS $Ax = b$ hat

- hat genau eine Lösung falls $r(A) = n \to \dim(L) = 0$
- hat unendlich viele Lösungen falls $r(A) < n \to \dim(L) > 0$
- hat keine Lösung falls das LGS eine Zeile hat $0 \;\; 0 \;\; 0 \,| \;\; \neq 0$

Beispiel: Anzahl Lösungen eines LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & u & v \end{array}\right)$$

- hat genau eine Lösung, falls $u \neq 0$, $\underline{v \in \mathbb{R}}$
- hat keine Lösung, falls $u = 0$ und $v \neq 0$
- hat unendlich viele Lösungen, falls $u = 0$ und $v = 0$

Dimension der Lösungsmenge: 3 Fälle

$\dim(\mathbf{L}) = \mathbf{n} - \mathbf{r}(\mathbf{A})$ L = Lösungsmenge eines LGS Ax=b

- **Fall 1: $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ A ist regulär**

$\det(A) \neq 0 \;\leftrightarrow\; r(A) = n$

$\dim(L) = n - n = 0$

(geometrische Interpretation: $L \;\widehat{=}\;$ Punkt)

$\Rightarrow$ L **hat genau 1 Lösung**

Dimension der Lösungsmenge: 3 Fälle (Forts.)

- **Fall 2:** $\det(A) = 0$ und **LGS unlösbar!**

Das LGS hat eine Zeile: $0 \; 0 \; 0 \,| \neq 0$

$\Rightarrow$ L **hat keine Lösung**

- **Fall 3: det(A)= 0 und LGS lösbar** $r(A) < n$

$\dim(L) = n - r(A) > 0$

$\dim(L) = 1 \to L \;\widehat{=}\;$ Gerade $\quad \dim(L) = 2 \to L \;\widehat{=}\;$ Ebene

$\Rightarrow$ L **hat unendlich viele Lösungen**

(erlaubte) Elementare-Zeilenumformungen:

- Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren
- Vertauschen zweier Zeilen
- Multiplizieren einer Zeile mit $\lambda \neq 0$

Cramersche Regel (um LGS zu lösen)

Ist A eine reguläre $[nxn]$ Matrix, so hat das LGS $Ax = b$ eindeutige Lösungen $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ mit

$$\hat{x}_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \qquad A_i: \; i\text{-te Spalte von } A \text{ durch } b \text{ ersetzen}$$

<u>Beispiel:</u> LGS $(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$$\hat{x}_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{3 \cdot 1 - 0 \cdot 1} = \frac{3}{3} = 1 \qquad \hat{x}_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{3} = 2$$

Basis

Vektorraum mit $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathbb{C}^n) = n$.

Eine Basis besteht aus

- genau n linear unabhängigen Vektoren

  d.h. $\det(v^{(1)}\ v^{(2)}\ \ldots\ v^{(n)}) \neq 0$

Basis 1 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Lineare Unabhängigkeit:

$v^{(1)}, \ldots, v^{(k)}$ sind linear unabhängig, falls

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot v^{(1)} + \ldots + \lambda_k \cdot v^{(k)} = 0}_{\text{LGS } A\lambda = 0} \overset{!}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0 \qquad (\Rightarrow \operatorname{kern}(A) = 0)$$

Linear abh.: falls das LGS unendlich viele Lösungen hat

Lineare Unabhängigkeit überprüfen:

- n Vektoren $\in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \det\left(v^{(1)}\ \ldots\ v^{(n)}\right) \neq 0$
- sonst LGS lösen oder von Auge vergleichen (bei 2 Vektoren)

Basis 2 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Basis (des $\mathbb{R}^n$):

1) n linear unabhängige Vektoren $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$ $(\in \mathbb{R}^n)$

orthogonale Basis:

1) n linear unabhängige Vektoren
2) $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$ sind paarweise orthogonal (Skalarprodukt $= 0$)

orthonormale Basis (ONB):

1) n linear unabhängige Vektoren
2) $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$ sind paarweise orthogonal (Skalarprodukt $= 0$)
3) alle Vektoren haben Länge 1 (= normiert)

Basis 3 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Euklidisches **Skalarprodukt** = inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v^{(i)} \cdot \overline{w^{(i)}} \qquad (v, w \in \mathbb{C})$$

allgemein gilt für ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (= inneres Produkt):

- v und w sind orthogonal $\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$
- Länge von $v = ||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ normiert: $\dfrac{v}{||v||}$
- $\cos(\varphi) = \dfrac{\langle v, w \rangle}{||v||\ ||w||}$ (Winkel $0 \leq \varphi \leq \pi$ zwischen v und w)

Basis 4 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt:

Basis $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$ gegeben, ist aber nicht orthogonal:

$w^{(1)} = v^{(1)}$

$w^{(2)} = v^{(2)} - \frac{\langle w^{(1)}, v^{(2)} \rangle}{\langle w^{(1)}, w^{(1)} \rangle} w^{(1)}$

$\vdots$

$w^{(j)} = v^{(j)} - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle w^{(i)}, v^{(j)} \rangle}{\langle w^{(i)}, w^{(i)} \rangle} w^{(i)}$ für $j = 2, \ldots n$

Vektoren normieren: $w^{(i)} \cdot \frac{1}{||w^{(i)}||} \longrightarrow$ ONB

Basis 5 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Beispiel aus alten Übungen:

$$\{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

To find an orthonormal basis of this eigenspace, we set

$$w_1 = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

and find $w_2\prime$ such that $w_2\prime = v_1 + \lambda v_2$ and $\langle v_1, w_2\prime \rangle = 0$. This gives us

$0 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 1 + \lambda - (-1) = 2 + \lambda$, so $\lambda = -2$

and $w_2\prime = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. We normalise this vector and get

$$w_2 = 1/\sqrt{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Basis 6 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Basiswechsel / Basiswechselmatrix:

Koordinaten eines Vektors sind (bis jetzt immer) gegeben für Standardbasis $[e]$ (=Einheitsvektoren)

im $\mathbb{R}^3$: $[e] = [(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T]$

- Neue Basis $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(n)}]$ gegeben

Koordinaten desselben Vektors **für neue Basis** $[v]$ berechnen **via Basiswechselmatrix:** $Id_{[\text{von alter Basis}] \to [\text{zu neuer Basis}]}$

- $Id_{[v] \to [e]} = \left(v^{(1)}\ v^{(2)}\ \ldots\ v^{(n)}\right)$

Basiswechsel 1 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Vektor in neuer Basis $[v]$ darstellen:

Koordinaten von w gegeben (für Standardbasis $[e]$)

w' = Koordinaten von w für neue Basis $[v]$:

1) $Id_{[v] \to [e]}$ invertieren (für andere Richtung)

$\to Id_{[e] \to [v]} = \left(Id_{[v] \to [e]}\right)^{-1} = \left(v^{(1)}\ v^{(2)}\ \ldots\ v^{(n)}\right)^{-1}$

Falls $[v]$ eine ONB ist: $\left(Id_{[v] \to [e]}\right)^{-1} = \left(Id_{[v] \to [e]}\right)^T$

2) Koordinaten w' für neue Basis $[v]$ berechnen

$Id_{[e] \to [v]} \cdot w_{[e]} = w'_{[v]} = w'$

Basiswechsel 2 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Abbildungsmatrix (für Standardbasis [e]) aufstellen:

Abbildungsvorschrift $T : (x_1, \ldots, x_n)^T \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$

(ist in der Aufgabenstellung) vorgegeben:

$$\Big(\underbrace{\text{Abbildungsmatrix}}_{T_{[e]\to[e]}}\Big) \cdot \big(\text{urspr. Vektor}\big) = \big(\text{neuer Vektor}\big)$$

$$\begin{pmatrix} & \text{ablesen / ergänzen} & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (gegeben) \\ (gegeben) \\ (gegeben) \\ (gegeben) \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix für andere Basen angeben:

Gegeben: Abbildungsmatrix $\left(= T_{[e]\to[e]}\right)$

$$T_{[v]\to[w]} = Id_{[e]\to[w]} \cdot T_{[e]\to[e]} \cdot Id_{[v]\to[e]}$$

wobei $Id_{[v]\to[e]} = \begin{pmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} & \ldots & v^{(n)} \end{pmatrix}$

und $Id_{[e]\to[v]} = \left(Id_{[v]\to[e]}\right)^{-1}$ (invertieren)

falls $[w]$ eine ONB ist gilt: $Id_{[e]\to[w]} = \left(Id_{[w]\to[e]}\right)^T$

(Vorzeigeaufgabe dazu in der Playlist!

Abbildungsmatrix für Polynom-Vektorraum $\mathbb{P}_n$:

Standard-Basis für $\mathbb{P}_n$: $\begin{pmatrix} x^n \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^{n-1} \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) Vektor f & Bildvektor $T(f)$ in geg. Basis ausdrücken

2) Abbildungsmatrix via Matrizenmultiplikation aufstellen:

$$T \cdot f = T(f)$$

Beispiel Abbildungsmatrix für $\mathbb{P}_n$:

$f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d \in \mathbb{P}_3$

$T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2, \quad T(f) = 3az^2 + 2bz + c$

1) Koeff. für Standardbasis: $f(z) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \qquad T(f) = \begin{pmatrix} 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix}$

2) Abb.matrix: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix}$

Bild und Kern einer linearen Abbildung:

Lineare Abbildung $f : V \to W$ (mit Abbildungsmatrix A)

$\text{Bild}(f) = \text{range}(f) := \{f(x) \mid x \in V\} \subset W$

$\text{Kern}(f) = \text{kernel}(f) = \text{Null}(f) := \{x \in V \mid f(x) = 0\} \subset V$

Hinweis: beide sind Untervektorräume(!) mit

Dimension vom Bild = r(A) Dimension vom Kern = $n - r$(A)

allg. gilt: dim(Bild) + dim(Kern) = n

Dimension von C_A und Basis von C_A:

(siehe Playlist-Zusatzvideo "Dimension einer Matrix")

Lineare Abbildung $f : V \to W$

mit Abbildungsmatrix A

- $\dim(C_A) = rank(A) = r(A)$
- Basis von C_A:

  $r(A)$ linear unabhängige Spaltenvektoren von A

Fundamentaler Satz der Algebra:

Jedes Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ vom Grad $n \geq 1$

mit komplexen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$

*hat (*bei "Mehrfachzählung") immer n Nullstellen und*

kann gschrieben werden in der Form: $p(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$.

*Bsp.

$p(z) = z^3 - 2z^2 + z = 1 \cdot (z-0) \cdot \underline{(z-1)} \cdot \underline{(z-1)} = z^1 \cdot (z-1)^2$

Bsp. quadratische Gleichung:

$p(z) = z^2 - 2z + 2$

hat Grad $n = 2$ und somit in $\mathbb{C}$ genau 2 Nullstellen*:

Mitternachtsformel: $a = 1,\ b = -2,\ c = 2$:

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$\rightarrow z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$

$\Rightarrow$ komplex konjugierte Lösung $z_2 = \overline{z_1} = \overline{1+i} = 1 - i$

Komplexe Zahlen:

- $i^2 = -1$
- Kartesische Koordinaten: $z = a + ib = \underbrace{a}_{Re(z)} + i \cdot \underbrace{b}_{Im(z)}$ (Normalform)
- Komplex konjugiertes: $\overline{z} = a - ib$

Hinweis: komplexe Lösungen sind immer paarweise konjugiert!

(d.h. quadr. Gleichung mit Lös. $x_1 = a + i \cdot b \rightarrow x_2 = a - i \cdot b$)

Polarkoordinaten ($\longleftrightarrow$ kartesischen Koordinaten):

Polarkoordinaten: $z = re^{i \cdot \varphi}$ (kart. Koo.: $z = a + i \cdot b$)

$r = |z| = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (arctan hat 2 Lösungen!! $\rightarrow$ kontrolliere a)

(oder φ graphisch bestimmen)

mit $\underline{a = r \cdot \cos(\varphi)}$ $b = r \cdot \sin(\varphi)$

Gleichung lösen in Polarkoordinaten:

Gleichungen der Form:

$w^n = a + ib$ oder $w = \sqrt[n]{a + ib}$

(kann rechts auch eine reelle Zahl sein $\rightarrow b = 0$)

In Polarform umschreiben! $\Rightarrow$ $w = \sqrt[n]{re^{i \cdot \varphi}}$

hat n Lösungen:

$$w_1, \ldots, w_n = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot (k-1)\right)}, \quad k = 1, \ldots, n$$

(siehe Beispiel rechts)

Beispiel: Gleichung lösen in Polarkoordinaten

$w^3 = 1 + i \quad \widehat{=} \quad w = \sqrt[3]{1+i}$ hat 3 Lösungen!

Polarkoordinaten von $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \pi/4}$

Formel: $w_1, \ldots, w_3 = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{i \cdot \left(\frac{\pi/4}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot (k-1)\right)}, \quad k = 1, \ldots, 3$

$w_1 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 0\right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12}\right)}$,

$w_2 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 1\right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{9\pi}{12}\right)}$,

$w_3 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 2\right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{17\pi}{12}\right)}$

Bruch vereinfachen zu Komplexer Zahl:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

Beispiel: $z_1 = 3 + 5i, \quad z_2 = 4 + 2i$

$$= \frac{(3+5i) \cdot (4-2i)}{(4+2i) \cdot (4-2i)} = \frac{(3+5i) \cdot (4-2i)}{4^2 \underbrace{+}_{-i^2} 2^2} = \frac{(3 \cdot 4 \overbrace{+}^{-i^2} 5 \cdot 2) + i \cdot (5 \cdot 4 - 3 \cdot 2)}{20}$$

$$= \frac{22 + i \cdot (14)}{20} = \frac{22}{20} + i\frac{14}{20} = 1.1 + 0.7i$$

Multiplikation / Division mit Polarkoordinaten:

$z_1 = r_1 e^{i \cdot \varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i \cdot \varphi_2}$

$z_1 \cdot z_2 = \left(r_1 e^{i \cdot \varphi_1}\right) \cdot \left(r_2 e^{i \cdot \varphi_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$ $\quad z^n = \left(r \cdot e^{i\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{i \cdot (n \cdot \varphi)}$

Eigenwerte (EW) berechen:

Lösungen von $\det(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}_{n\times n}) = 0$

$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}_{n\times n})$ heisst charakteristisches Polynom

Eigenwerte = Nullstellen des char. Polynoms:

$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)^{a_n} = 0$

a_i ist die **algebraische Multiplizität** vom Eigenwert λ_i

Hinweis: $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$

Kubische Gleichung lösen:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mit $d \neq 0$ (ansonsten ausklammern)

- 1 Nullstelle erraten $\Leftarrow$ Teiler von d
- Polynomdivision $\Rightarrow$ restl. NS via "Mitternachtsformel"
  https://youtu.be/L0cSK8B0rS4

"verstecke Quadr. Gl.:"

$ax^6 + bx^3 + c = 0$

$z = x^3$ substituieren $\Rightarrow$ $az^2 + bz + c = 0$

Eigenvektor (EV) v zum EW λ:

Erfüllt: $Av = \lambda v$ $\quad (v \neq 0)$

Eigenraum $E_{\lambda_i}(A)$ aller Eigenvektoren berechnen:

- $(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}_{n\times n})\, v = 0$ lösen (homogenes LGS)
- (Basis)Vektoren vom Eigenraum $E_\lambda(A)$ sind EV.

$E_{\lambda_i}(A) = \{$ Menge aller Eigenvektoren $\} \cup \{ \vec{0} \}$

$\dim(E_{\lambda_i})$ = **geometrische Multiplitzität** vom EW λ_i

und $1 \leq$ geom. Multipl. $\leq$ algebr. Multipl.

Spektrum einer linearen Abbildung f_A:

Lineare Abbildung $f_A : V \to W$

(mit Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$)

Spektrum = Menge aller Eigenwerte
inkl. algebr. Multiplizität!
(d.h. Mehrfachauflistung)

$\mathrm{spec}(A) = \{\lambda_1 = \ldots, \lambda_2 = \ldots, \ \ldots\ldots, \ \lambda_n = \ldots\}$

Eine Matrix A ist diagonalisierbar:

Eine lineare Abbildung f_A / Matrix A ist diagonalisierbar, **falls es eine Basis** $[v] = [v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}]$ **gibt bestehend aus Eigenvektoren von** A.

$\Longrightarrow A = SDS^{-1}$

mit $S = \left(v^{(1)} \ldots v^{(n)}\right)$

und Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

(Eigenwerte in der Diagonalen)

Hinweis: $S \mathrel{\hat{=}} Id_{[v]\to[e]}$, $\quad D \mathrel{\hat{=}} f_{[v]\to[v]}$

Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar!

Falls A **symmetrisch** ist (d.h. $A^T = A$) gilt:

- A ist diagonalisierbar
- Eigenvektoren von A bilden eine **Orthonormalbasis**

$\to S^{-1} = S^T$,

da $S = \left(v^{(1)} \ldots v^{(n)}\right)$ eine *orthogonale Matrix* ist

$\Rightarrow A = SDS^T$ $\quad$ (mit $D = f_{[v]\to[v]}$)

Hinweis: symmetrische Matrizen haben nur reelle Eigenwerte

Orthogonale (= unitäre) Matrix:

Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **ist orthogonal** $\Longleftrightarrow A^T = A^{-1}$

prüfe: $A^TA = \mathrm{Id}_{n\times n} = AA^T \quad \Rightarrow \quad \det(A) \in \{-1, 1\}$

A orthogonale Matrix $\Leftrightarrow$ Spaltenvektoren bilden eine ONB

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist **unitär** $\Longleftrightarrow \overline{A}^T = A^{-1}$,

d.h. $\overline{A}^T A = \mathrm{Id}_{n\times n} = A\overline{A}^T \Longleftrightarrow$ Vektoren bilden ONB

Orthogonale (= unitäre) Matrix überpüfen:

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist orthogonal, falls: $A^TA = \mathrm{Id}_{n\times n}$

oder Spaltenvektoren $a_1 \ldots a_n$ eine orthonormale Basis (ONB) bilden:

- orthogonal: $\langle a_i, a_j \rangle = 0 \qquad 1 \leq i \neq j \leq n$
- Länge 1: $||\, a_i \,|| = \sqrt{\langle a_i, a_i \rangle} = 1 \qquad 1 \leq i \leq n$

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist unitär, falls $\overline{A}^T A = \mathrm{Id}_{n\times n}$ d.h. Vektoren = ONB

Aufpassen im komplexen! $\langle v, w \rangle = v^{(1)} \cdot \overline{w^{(1)}} + \ldots + v^{(n)} \cdot \overline{w^{(n)}}$

$< (1+i), (1+i) >= (1+i) \cdot \overline{(1+i)} = (1+i) \cdot (1-i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$

symmetrisch / hermitisch:

A ist symmetrisch, falls gilt: $A^T = A$

A ist hermitisch, falls gilt: $\overline{A}^T = A$

$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = A, \quad \overline{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \neq A$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \neq B, \quad \overline{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = B$

$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{C}^T = C^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = C$

A symmetrisch, B hermitisch, C symmetrisch und hermitisch

Prüfen 3 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Quadratische Form:

$Q(x) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i x_j \overset{\text{Bsp}}{=} a_{11} x_1^2 + (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$

Kann mit dem (normalen) Skalarprodukt geschrieben werden als:

$Q(x) = Q_A(x) = \langle x, Ax \rangle$ mit A symmetrisch

Beispiel: $Q(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 8x_2^2$

$\rightarrow Q(x) = \langle x, Ax \rangle = (x_1 \;\; x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Prüfen 4 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

positive-, negativ- und indefinit:

Eine symmetrische Matrix A ist:

- positiv definit, falls alle EW $\lambda_i > 0$ (d.h. $Q(x) > 0 \; \forall x$)
- positiv semidefinit falls alle $\lambda_i \ge 0$ (d.h. $Q(x) \ge 0 \; \forall x$)
- negativ definit, falls alle EW $\lambda_i < 0$ (d.h. $Q(x) < 0 \; \forall x$)
- negativ semidefinit falls alle $\lambda_i \le 0$ (d.h. $Q(x) \le 0 \; \forall x$)
- indefinit, falls A sowohl pos. wie auch neg. λ_i hat

Alternativ: via (Determinanten der) **Hauptminoren**

Prüfen 5 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Hauptminoren zur Bestimmung der Definitheit

Eine symmetrische Matrix A ist:

positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Hauptminoren $\det(A^{(k)}) > 0 \quad 1 \le k \le n$

negativ definit $\Leftrightarrow$ $(-1)^k \det(A^{(k)}) > 0 \quad 1 \le k \le n$

indefinit & semidefinit: besser via Eigenwerte bestimmen!

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ $A^{(1)}$ $A^{(2)}$ $A^{(3)} = A$

Prüfen 6 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Inneres Produkt (= Skalarprodukt) prüfen:

allg. Formeln siehe Lernkärtchen Basis 4

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Inneres Produkt, falls $\forall u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(IP1) symmetrisch: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

(IP2) bilinear: $\langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$

$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$

(IP3) positiv definit: $\langle v, v \rangle \ge 0$

und $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Zeigen 1 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Inneres Produkt eines komplexen VR prüfen:

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Inneres Produkt, falls für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:

$(\text{IP1})_{\mathbb{C}}$ hermitisch: $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}, \quad \forall v, w \in V$

$(\text{IP2})_{\mathbb{C}}$ linear im ersten Argument: $\forall v, w, u \in V, \; \alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$\langle \alpha v + \beta w, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle + \beta \langle w, u \rangle$

$(\text{IP3})_{\mathbb{C}}$ positiv definit: $\langle v, v \rangle \ge 0$ und $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Aufpassen bei komplexem Skalarprodukt:

zweites Argument / Faktor ist immer komplex konjugiert!

Zeigen 2 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Überprüfen ob eine Funktion linear ist:

Eine Funktion mit Abbildungsmatrix T ist linear, falls gilt:

$T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$ $f(0) = 0$!!!

Untervektorraum (subspace) prüfen: ($\rightarrow$ Video)

W ist ein Untervektorraum, falls

- $0 \in W$ ($0 \notin W \rightarrow$ Gegenbeispiel dass W kein UVR ist)
- $\lambda \cdot a + b \in W \quad \forall a, b \in W, \lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Zeigen 3 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Vektorraum zeigen / prüfen:

Ein Vektorraum ist eine nichtleere Menge V mit Addition $\oplus$ und Multiplikation $\odot$ für die gilt: $\forall a, b, c \in V, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ ($\oplus$ assoziativ)
- $a \oplus b = b \oplus a$ ($\oplus$ kommutativ)
- **Nullelement**: $\exists\, 0 \in V$ so dass $\forall a \in V \quad 0 \oplus a = a \oplus 0 = a$
- Inverses: $\forall a \in V$ existiert ein $b \in V$: $a \oplus b = 0 \quad \rightarrow b = (-a)$
- $\lambda \odot (\mu \odot a) = (\lambda \odot \mu) \odot a$ ($\odot$ assoziativ)
- $1 \odot a = a$ (neutrales Element der Multipl.)
- $\lambda \odot (a \oplus b) = \lambda \odot a \oplus \lambda \odot b$ (beide Distributivgesetze gelten)
- $(\lambda \oplus \mu) \odot a = \lambda \odot a \oplus \mu \odot a$

Zeigen 4 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

DGL-System $y' = Ay$ lösen:

- EW λ_1, λ_2 und zugehörige EV $v^{(1)}, v^{(2)}$ von A berechnen
- allgemeine Lösung:

  $y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot v^{(1)} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot v^{(2)} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
- **Falls Anfangswertproblem:**

  Anfangswerte einsetzen und Gl.sys. nach C_1, C_2 auflösen

Spezialfall: **Falls A eine Nullzeile hat!**

- A^2, A^3, etc. berechnen bis $A^n =$ Nullmatrix
- Allg. Lösung von $y' = Ay \quad \rightarrow \quad \underline{y(t) = e^{At} y_0}$
- benutze $e^{At} =: \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(A \cdot t)^j \qquad y_0 = (a_0, b_0)^T = y(0)$

$$\Rightarrow y(t) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(A \cdot t)^j \right) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(Id + \frac{A^1 \cdot t^1}{1!} + \ldots + \frac{A^n \cdot t^n}{n!} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Lineare DGL mit Anfangswert lösen:

$\dot{x} = a \cdot x \quad$ mit Anfangswert $\quad x(t_0) = c$

hat Lösung: $x(t) = c \cdot e^{a \cdot (t - t_0)}$

- Beispiel: $\quad \dot{x} = 2x \quad$ mit Anfangswert $\quad x(1) = (4 + i)$

$\Rightarrow$ Lösung $x(t) = (4 + i) \cdot e^{2(t-1)}$

Falls DGL-System komplexe Eigenwerte hat:

- Nur $\lambda_1 = a + i \cdot b$ benutzen und $v^{(1)}$ zu λ_1 ausrechnen
- betrachte $e^{\lambda_1 t} \cdot v^{(1)} = e^{at} \cdot e^{i \cdot bt} \cdot v^{(1)}$
- Euler's Formel anwenden: $e^{\pm i \cdot bt} = \big(\cos(bt) \pm i \cdot \sin(bt)\big)$
- $\big(\cos(bt) \pm i \cdot \sin(bt)\ \big) \cdot v^{(1)}$ ausmultiplizieren
- sortieren zu 2 Vektoren: $($ Realteil $) + i \cdot ($ Imaginärteil $)$

$\Rightarrow$ Lösung: $y(t) = C_1 \cdot \underline{e^{at}(\text{Realteil})} + C_2 \cdot \underline{e^{at}(\text{Imaginärteil})}$

Beispiel DGL-System mit komplexen Eigenwerten:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 0 \pm i \cdot 1$

- $\lambda_1 = i = 0 + i \cdot 1 \qquad (a = 0, b = 1)$
- $\begin{pmatrix} 1 - i & -1 \\ 2 & -1 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v^{(1)} = \begin{pmatrix} +1 \\ 1 - i \end{pmatrix}$
- $e^{(0 + i \cdot 1)t} \cdot v^{(1)} = e^{0 \cdot t} \cdot e^{i \cdot t} \cdot v^{(1)} = \underbrace{e^0}_{=1} \cdot e^{i \cdot t} \cdot v^{(1)} = e^{i \cdot t} \cdot v^{(1)}$

Beispiel DGL-System mit komplexen Eigenwerten:

- $e^{i \cdot t} \cdot v^{(1)} = \big(\cos(t) + i \cdot \sin(t)\big) \cdot v^{(1)}$
- $\big(\cos(t) + i \cdot \sin(t)\big) \cdot \binom{1}{1-i}$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) + i \cdot \sin(t) \\ \cos(t) + i \cdot \sin(t) - i(\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \end{pmatrix}$$

- sortiert: $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y(t) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$

Formel als Alternative zum sortieren:

$\underline{e^{at} \cdot \text{Realteil}} = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda_1 t} v^{(1)} + e^{\lambda_2 t} v^{(2)}\right)$

$\underline{e^{at} \cdot \text{Imaginärteil}} = \frac{1}{2i}\left(e^{\lambda_1 t} v^{(1)} - e^{\lambda_2 t} v^{(2)}\right)$

- $\lambda_1 = a + i \cdot b \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = a - i \cdot b$
- $v^{(1)}$ zu λ_1 ausrechnen $\Rightarrow v^{(2)} = \overline{v^{(1)}}$
- dabei $\quad e^{\lambda_1 t} = e^{at} \cdot e^{ibt}, \quad e^{\lambda_2 t} = e^{at} \cdot e^{-ibt} \quad$ und

  Euler's formula $e^{\pm i \cdot b \cdot t} = \big(\cos(bt) \pm i \cdot \sin(bt)\big)$ anwenden

$\Rightarrow y(t) = C_1 \cdot \underline{e^{at}(\text{Realteil})} + C_2 \cdot \underline{e^{at}(\text{Imaginärteil})} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

DGL höherer Ordnung via $\mathbf{y' = Ay}$:

Homogene DGL: x” = ax + bx’

Betrachte $y = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$

$$\rightarrow y' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = Ay$$

lösen wie bei DGL-Systeme 1

Zusätzlich:

Lineare Abbildung: Spiegeln an der x-Achse

Abbildungsmatrix für eine Spiegelung an der x-Achse:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Spiegeln an der y-Achse

Abbildungsmatrix für eine Spiegelung an der y-Achse:

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Punktspiegelung am Ursprung

Abbildungsmatrix für eine Spiegelung am Ursprung:

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(= Spiegelung an } x\text{- und } y\text{-Achse)}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um Winkel φ

Abbildungsmatrix für eine Rotation um den Winkel φ:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{(im Uhrzeigersinn!)}$$

Beispiel: Drehe um 90° (im Uhrzeigersinn)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um Winkel φ

Abbildungsmatrix für eine Rotation um den Winkel φ:

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{(im Gegen-Uhrzeigersinn!)}$$

Beispiel: Drehe um 90° (im Gegen-Uhrzeigersinn)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen kombinieren

Matrizen in umgekehrter Reihenfolge multiplizieren!

Beispiel: $(0, -1)^T$ zuerst an x-Achse spiegeln, danach noch im Uhrzeigersinn um 90° drehen: $\rightarrow$ Abb.matrix $R \cdot X$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um x-Achse

Abb.matrix für eine Rotation (um φ) um die x-Achse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{(im Uhrzeigersinn!)}$$

Beispiel: Drehe um 90° (im Uhrzeigersinn) um x-Achse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um x-Achse

Abb.matrix für eine Rotation (um φ) um die x-Achse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{(im Gegen-Uhrzeigersinn!)}$$

Beispiel: Drehe um 90° (im GUS) um x-Achse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um y-Achse

Abb.matrix für eine Rotation (um φ) um die y-Achse:

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \qquad \text{(im Gegen-Uhrzeigersinn!)}$$

Beispiel: Drehe um 90° (im GUS) um y-Achse

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um z-Achse

Abb.matrix für eine Rotation (um φ) um die z-Achse:

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(im Gegen-Uhrzeigersinn!)}$$

Beispiel: Drehe um 90° (im GUS) um z-Achse

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$