Integrale

1. $\displaystyle\int \frac{88x^{87}+174x^{86}}{x^{88}+2x^{87}+89}dx$

$$\int \frac{88x^{87}+174x^{86}}{x^{88}+2x^{87}+89}dx = \int \frac{88x^{87}+174x^{86}}{u}\frac{1}{88x^{87}+174x^{86}}du = \int \frac{1}{u}du = \ln u + c.$$

(10 Punkte)

2. $\displaystyle\int x^2 \sin(x)dx$

(a)

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x &= -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - 2\int \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x).\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^3}dx$

(b) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^3}\,dx = \lim_{\mathbb{R}\ni\xi\to\infty}\int_0^\xi \frac{1}{(x+1)^3}\,dx = \lim_{\mathbb{R}\ni\xi\to\infty}[\frac{-1}{2(x+1)^2}]_0^\xi = \lim_{\mathbb{R}\ni\xi\to\infty}\frac{-1}{2(\xi+1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

4. $\displaystyle\int x^2 \log x dx$

10. **Allgemein:** $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

$$\int x^2 \log x dx$$

$$\begin{aligned}f(x) = \log x \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = x^2 \quad &\Rightarrow \quad g(x) = \frac{x^3}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x^2 \log x dx &= \log x\frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x}\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^2}{3} \\ &= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + c = \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{9}x^3 + c\end{aligned}$$

5. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3}{x^4-1}dx$

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x^3}{x^4-1}dx &= \int_2^3 \frac{\left(\frac{1}{4}x^4\right)'}{x^4-1}dx = \left[\frac{1}{4}\ln\left|x^4-1\right|\right]_2^3 \\ &= \frac{1}{4}(\ln(80) - \ln(15)) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{16}{3}\right).\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int x^6 \ln(x^2)dx$

(i) Partielle Integration: $\int x^6\ln(x^2)dx = \frac{x^7}{7}\ln(x^2) - \int \frac{2}{7}x^6 = \frac{x^7}{7}\ln(x^2) - \frac{2}{49}x^7 + c.$

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx$

c) Substitution $y = 1 - x^2$, $dy = -2xdx$

$$\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}dx = -\frac{1}{2}\int_1^0 y^{-1/2}\,dy = -y^{1/2}|_1^0 = 1$$

1. * $\int_0^1 \left(\sin^2 x \cos x + \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{x^2+1} \right) \, dx$

Lösung:

Für den ersten Integranden bemerkt man, dass cos die Ableitung von sin ist und somit schreibt man $\sin(x)^2 \cos(x) = \frac{1}{3}(\sin^3 x)'$. Die anderen zwei Integranden lassen sich leicht integrieren

$$\int_0^1 \left(\sin^2 x \cos x + \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \left(\frac{1}{3} \sin^3 x + 2\sqrt{x+2} + \arctan x \right) \Big|_0^1$$
$$= \frac{\sin^3(1)}{3} + 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2}.$$

Als Zusatz (nur falls jemand vorige Zeit hat...) - eher als HA gedacht

Problem 3 (1.5P/1.5P/1.5P)

Entscheide, ob folgende uneigentliche Integrale konvergieren und berechne sie, falls dies der Fall ist:

(i) $\int_{-1}^0 \frac{1}{(1+x)^{2/3}} dx$.

///// Wir berechnen für $F(x) = 3\sqrt[3]{1+x}$, dass $F'(x) = \frac{1}{(1+x)^{2/3}}$. Damit erhalten wir für $-1 < \beta < 0$

$$\int_\beta^0 \frac{1}{(1+x)^{2/3}} dx = \left[3\sqrt[3]{1+x}\right]_\beta^0 = 3 - 3\sqrt[3]{1+\beta}.$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{\beta \downarrow -1} \int_\beta^0 \frac{1}{(1+x)^{2/3}} dx = \lim_{\beta \downarrow -1} \left(3 - 3\sqrt[3]{1+\beta}\right) = 3.$$

/////

(ii) $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} dx$

///// Wir berechnen für $F(x) = -\frac{1}{\pi} \log(\cos(\pi x))$ mit der Kettenregel, dass $F'(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}$. Damit erhalten wir für $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$

$$\int_\alpha^0 \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} dx = \left[-\frac{1}{\pi} \log(\cos(\pi x))\right]_\alpha^0 = -\frac{1}{\pi} \log(\cos(0)) + \frac{1}{\pi} \log(\cos(\pi \alpha)) = \frac{1}{\pi} \log(\cos(\pi \alpha)).$$

Da $\lim_{\alpha \downarrow -\frac{1}{2}} \cos(\pi \alpha) = 0$, $x \mapsto \log(x)$ stetig und $\lim_{y \downarrow 0} \log(y) = -\infty$, erhalten wir, dass das uneigentliche Integral $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} dx$ nicht konvergiert. /////

(iii) $\int_0^e \log(x) dx$.

Hinweis: Benütze $\lim_{\alpha \downarrow 0} -\alpha \log(\alpha) = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\log(\alpha)}{\alpha}$.

///// Wir berechnen für $F(x) = x(\log(x) - 1)$ mit der Kettenregel, dass $F'(x) = \log(x)$. Damit erhalten wir für $0 < \alpha < e$

$$\int_\alpha^e \log(x) dx = \left[x(\log(x) - 1)\right]_\alpha^e = -\alpha \log(\alpha) + \alpha.$$

Wir verwenden die Regel von L'Hospital vom Anfang dieses Übungsblattes und den Hinweis und erhalten

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} -\alpha \log(\alpha) = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\log(\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{\alpha} = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\int_0^e \log(x) dx = \lim_{\alpha \downarrow 0} \int_\alpha^e \log(x) dx = \lim_{\alpha \downarrow 0} \left(-\alpha \log(\alpha) + \alpha\right) = 0.$$

Problem 5 (1P/1P/2P)

Entscheide, ob folgende uneigentliche Integrale konvergieren oder divergieren.
Hinweis: Verwende Konvergenzkriterien.

(i) $\int_1^\infty \frac{1}{x^5+3x^4-x^2+1}dx$

///// Für $x \geq 1$ gilt $x^5 \geq x^2$ und damit haben wir

$$x^5+3x^4-x^2+1 \geq 3x^4+1 \geq 3x^4.$$

Es gilt also für $x \geq 1$

$$\left|\frac{1}{x^5+3x^4-x^2+1}\right| = \frac{1}{x^5+3x^4-x^2+1} \leq \frac{1}{3x^4}.$$

Wegen dem Vergleichskriterium (F3.11) reicht es zu zeigen, dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{3x^4}dx$ existiert. Dies rechnen wir leicht nach

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{1}{3x^4}dx = \lim_{\beta\to\infty}\left[-\frac{1}{9x^3}\right]_1^\beta = \lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{1}{9\beta^3}+\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9}.$$

/////

(ii) $\int_2^\infty e^{-x\ln x}dx$

///// Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}$, dann haben wir $f'(x)=-e^{-x}<0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ und damit ist f streng monoton fallend. Weiter wissen wir, dass $f(x)=x$ und $f(x)=\ln(x)$ streng monoton steigende Funktionen sind. Damit gilt für $x\geq 2$, dass $x\ln(x)\geq x\ln(2)$. Daraus folgt also für alle $x\geq 2$

$$e^{-x\ln(x)} \geq e^{-x\ln(2)} = 2^{-x}.$$

Da $0\leq e^{-x\ln(x)}$, haben wir $|e^{-x\ln(x)}| = e^{-x\ln(x)} \leq 2^{-x}$ für alle $x\geq 2$. Wegen dem Vergleichskriterium (F3.11) reicht es zu zeigen, dass das uneigentliche Integral $\int_2^\infty 2^{-x}dx$ existiert. Dies rechnen wir leicht nach

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_2^\beta 2^{-x}dx = \lim_{\beta\to\infty}\left[-\frac{2^{-x}}{\ln(2)}\right]_2^\beta = \lim_{\beta\to\infty}\frac{-2^{-\beta}+2^{-2}}{\ln(2)} = \frac{1}{4\ln(2)}.$$

/////

(iii) $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x}dx$

Hinweis: Zuerst partiell integrieren.

///// Wir integrieren partiell und erhalten mittels der Dreiecksungleichung

$$\int_1^\beta \frac{\cos(x)}{x}dx = \frac{\sin(x)}{x}\Big|_1^\beta + \int_1^\beta \frac{1}{x^2}\sin(x)dx = \frac{\sin(\beta)}{\beta} - \frac{\sin(1)}{1} + \int_1^\beta \frac{1}{x^2}\sin(x)dx.$$

Da

$$0 \leq \left|\frac{\sin(\beta)}{\beta}\right| = \frac{|\sin(\beta)|}{|\beta|} \leq \frac{1}{|\beta|}$$

erhalten wir $\lim_{\beta\to\infty}\frac{\sin(\beta)}{\beta} = 0$. Falls wir zeigen können, dass $\lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{1}{x^2}\sin(x)dx$ existiert, dann existiert auch $\lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{\cos(x)}{x}dx$. D.h. wir müssen zeigen, dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\sin(x)dx$ existiert. Dafür verwenden wir wieder das Vergleichskriterium (F3.11) und

$$\left|\frac{1}{x^2}\sin(x)\right| = \frac{|\sin(x)|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Wir berechnen

$$\int_1^\beta \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\beta = -\frac{1}{\beta}+1.$$

Damit ist $\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{x^2}dx = 1$, also existiert $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$. Aus dem Vergleichskriterium folgt, dass $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\sin(x)dx$ existiert und damit existiert (mit der Berechnung zu Beginn) $\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x}dx$.
/////