Reihen

ETH Aufgaben Untersuchen Sie die Konvergenz folgender Reihen.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3k+5}}{3^k}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}$

Lösung

a) Hier können wir das Quotientenkriterium verwenden.

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{\sqrt{3(k+1)+5}}{3^{k+1}} \cdot \frac{3^k}{\sqrt{3k+5}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{3k+8}{3k+5}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{3+\frac{8}{k}}{3+\frac{5}{k}}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{3} < 1\end{aligned}$$

Es folgt also, dass die Reihe konvergiert.

Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium, da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1.$$

(1) Mit dem Wurzelkriterium erhalten wir

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{4n^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{4}\sqrt{n}}{\frac{n+1}{2}} = 2 \cdot \frac{\frac{\sqrt[n]{4}}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}.$$

Dies geht gegen Null für $n \to \infty$ und die Reihe ist konvergent.

(2) Wird durch eine geometrische Reihe mit Faktor < 1 majorisiert: Für grosse n gilt $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{n!}$.

(3) Wird durch die harmonische Reihe minorisiert.

(4) Harmonische Reihe.

HS13+HS14 Probeprüfung Aufgabe 4 + 3 Entscheiden Sie ob die folgenden Reihen konvergieren oder nicht:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{n!}$. (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n}$

(iii) Da $\frac{n}{n^3+1} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ konvergiert die Reihe aufgrund des Majorantenkriteriums absolut.

(iv) Mit Hilfe des Quotientenkriteriums sieht man die absolute Konvergenz dieser Reihe. In der Tat, falls $a_n := \frac{n^5}{n!}$, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)^5}{n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = 0 \cdot 1 = 0.$$

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

Ja, die Reihe konvergiert (Leibniz).

MAT121 HS10 Klausur1 Aufgabe 2 Welche der folgenden Reihen konvergieren (mit Begründung):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2+2n+3)}{3n+5} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

(a) Da

$$\frac{n^2+2n+3}{3n+5} = \frac{n+2+\frac{3}{n}}{3+\frac{5}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty,$$

ist $\frac{(-1)^n(n^2+2n+3)}{3n+5}$ keine Nullfolge, und die Reihe kann nicht konvergieren.

(b) Da

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}\right|} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{6}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1, & n \text{ gerade}, \\ \frac{\sqrt[n]{2}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1, & n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

ist nach dem Wurzelkriterium die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}$ absolut konvergent.

(c) Für alle $n \geq 2$ gilt

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{n\cdot n\cdot\dots\cdot n\cdot n\cdot n} = \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leq 1}\cdot\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leq 1}\cdot\dots\cdot\underbrace{\frac{3}{n}}_{\leq 1}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n} \leq \frac{2}{n^2}$$

Da aber $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

ETH Aufgaben 1 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$

1. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x^k$ ist

i) ✗ 2.
ii) ✗ ∞.
iii) ✗ 0.
iv) ✗ 1.
v) ✓ $\frac{1}{2}$.
vi) ✗ weiss ich nicht

Lösung Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{2^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ ist

i) ✗ 0.
ii) ✗ ∞.
iii) ✓ e.
iv) ✗ 1.
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n} \Big/ \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n} \Big/ \frac{n!}{(n+1)^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

4. Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$ beträgt

i) ✓ $\frac{1}{3}$.
ii) ✗ ∞.
iii) ✗ 0.
iv) ✗ $\frac{1}{9}$.
v) ✗ 3.
vi) ✗ 9.
vii) ✗ weiss ich nicht

Lösung Das Quotientenkriterium lässt sich hier leider nicht direkt anwenden, da alle ungeraden Koeffizienten der Potenzreihe sämtlich Null sind. Wir betrachten daher statt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$ zunächst die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} y^n$. Aus letzterer erhält man die ursprüngliche Potenzreihe zurück, indem man $y := x^2$ einsetzt. Die Koeffizienten der neuen Potenzreihe lauten $a_n = \frac{9^n}{n}$. Damit erhalten wir für deren Konvergenzradius

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{9^n}{9^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{9} \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{9}.$$

Die Ersatzreihe konvergiert also für $|y| < \frac{1}{9}$. Wegen des Zusammenhangs $y = x^2$ ist dies genau dann der Fall, wenn $|x| < \frac{1}{3}$.

∞

ETH Aufgaben 2 Für welche x konvergieren folgende Potenzreihen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(2x+\frac{1}{2}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}(x+3)^n$

8. Zwischenprüfung Winter 2015. Bestimme das Konvergenzintervall für die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(2x+\frac{1}{2}\right)^k.$$

i) ✗ $x=-\frac{1}{4}$
ii) ✗ $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
iii) ✓ $[-\frac{3}{4},\frac{1}{4})$
iv) ✗ $\mathbb{R}$
v) ✗ weiss ich nicht

Lösung Der Konvergenzradius von $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}y^k$ lautet

$$\varrho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k+1}{k} = 1.$$

Für $y=1$ haben wir die harmonische Reihe und für $y=-1$ die alternierende harmonische Reihe. Folglich konvergiert die Reihe genau dann wenn $2x+\frac{1}{2}\in[-1,1)$, also $x\in[-\frac{3}{4},\frac{1}{4})$.

Lösung Das Entwicklungszentrum ist offensichtlich $x_0 = 2$ und der Konvergenzradius berechnet sich durch

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)^2}{1} = 1.$$

Das Konvergenzintervall hat also die Randpunkte 1 und 3. Für $x=1$ konvergiert die Reihe als Leibniz-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ ebenfalls. Für $x=3$ ergibt sich die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, welche ebenfalls konvergiert.

Lösung Der Konvergenzradius beträgt

$$\varrho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Die Reihe konvergiert also sicher für $x\in(-\frac{7}{2},-\frac{5}{2})$ und divergiert für $x\notin[-\frac{7}{2},-\frac{5}{2}]$. Für $x=-\frac{7}{1}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}(x+3)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Die Reihe divergiert nach dem Minorantenkriterium. Im Fall $x=-\frac{5}{2}$ haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}(x+3)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

und die Potenzreihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium. Das Konvergenzintervall ist folglich $(-\frac{7}{2},-\frac{5}{2}]$.

HS14 Probeprüfung Aufgabe 3

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}z^n$

b) Konvergenzradius:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(n^{1/n^2})}\,\frac{1}{\lim_{n\to\infty}e^{\log(n)/n^2}} = \frac{1}{e^{\lim_{n\to\infty}\log(n)/n^2}} = \frac{1}{e^0} = 1$$

HS10 Probeprüfung Aufgabe 6 Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren (mit Begründungen):

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-n)^n$.

(b) Zuerst sieht man, dass $n^{-n} \leq n^{-2}$ ist für $n \geq 2$. Somit ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\pi^2}{6}.$$

Somit konvergiert die Reihe.

(c) Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Summanden einer konvergenten Reihe eine Nullfolge bilden. Aber

$$(-n)^n = (-1)^n \cdot n^n$$

ist keine Nullfolge, denn $n^n \to \infty$ für $n \to \infty$. Somit konvergiert die Reihe nicht.

Lösung: (b) konvergiert (c) konvergiert nicht

MAT121 2007 Prüfung Aufgabe 5 Diskutiere die Konvergenz oder Divergenz der folgenden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 2^{n \cos n\pi}}.$$

(1) Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\sqrt[n]{n} - 1)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} - 1 = 1 - 1 = 0\,.$$

Also ist nach dem Wurzelkriterium die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ konvergent.

(2) Da $\cos n\pi = 1$ für gerade n und $\cos n\pi = -1$ für ungerade n ist, schreiben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 2^{n \cos n\pi}} = \sum_{n \text{ gerade}} \frac{1}{\sqrt{n} + 2^n} + \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{\sqrt{n} + 2^{-n}}\,.$$

Da aber sowohl $\sqrt{n} \leq n$, als auch $2^{-n} \leq n$ für alle $n \geq 1$ ist, folgt mit $2/(2k+1) \geq 1/(2k+1) + 1/(2k+2)$, dass

$$\sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{\sqrt{n} + 2^{-n}} \geq \frac{1}{2} \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,.$$

Somit divergiert mindestens die Summe über die ungeraden n, also auch $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2^{n \cos n\pi}}$.

Lösung: a) konvergiert (nach dem Wurzelkriterium)
b) divergent (Teilsumme schon $\geq 0.25 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$)

MAT121 2007 Prüfung Aufgabe 5 Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ konvergiert folgende Reihe?

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+2)^2}$

(3) Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+2)^2}$$

hat den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n(n+2)^2}}} = \lim_{n\to\infty} 2e^{\frac{2}{n}\ln(n+2)} = \lim_{n\to\infty} 2e^{2\left(1+\frac{2}{n}\right)\frac{\ln(n+2)}{n+2}} = 2\,.$$

Also konvergiert die Reihe für alle $x \in (-2,2)$. Bei $x = 2$ erhalten wir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(n+2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\,,$$

wie wir aus der Vorlesung wissen. Bei $x = -2$ erhalten wir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n(n+2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} < \infty\,,$$

6 PRÜFUNG (MAT121.4 ANALYSIS I+II)

da $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n^2$ absolut konvergiert (siehe oben). Also konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+2)^2}$$

für alle $x \in [-2,2]$.

Lösung: c) konvergiert für alle $x \in [-2,2]$