Taylorpolynome

ETH Aufgaben Bestimme $T_1^2(f)$ von der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ und $T_0^2(g)$ von der Funktion $g(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$.

Das gesuchte Taylorpolynom ist

$$P_2(t) = f(1) + f'(1)(t-1) + \frac{f''(1)}{2}(t-1)^2 = 1 - \frac{1}{2}(t-1) + \frac{3}{4}(t-1)^2$$

Lösung Das zweite Taylorpolynom um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ lautet per Definition

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

Wir berechnen nun $f(0)$, $f'(0)$ sowie $f''(0)$ und setzen diese in obige Formel ein. Es gilt $f(0) = \frac{e^0}{1} = 1$. Mit Hilfe der Quotientenregel folgt

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x x}{(x+1)^2}$$

und damit $f'(0) = 0$. Für die zweite Ableitung erhalten wir wieder mit der Quotientenregel

$$f''(x) = \frac{(e^x x)'(x+1)^2 - e^x x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(e^x + xe^x)(x+1)^2 - e^x x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}.$$

Setzen wir $x = x_0 = 0$ ein, so bekommen wir $f''(0) = 1$. Das zweite Taylorpolynom lautet also $T_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$. Die erste Antwort stimmt.

HS07 Probeprüfung2 Aufgabe 2

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)e^{-x}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie das zugehörige vierte Taylorpolynom p_4 am Entwicklungspunkt 0.

(b) Geben Sie die Approximation $p_4(\frac{1}{2})$ an den Funktionswert $f(\frac{1}{2})$ an.

(ML nur Endlösung und selber habe ich leider noch keine Lösung geschrieben)

Lösung: (a) $p_4 = 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6}$ (b) $p_4(\frac{1}{2}) = \frac{17}{32}$

HS12 Probeprüfung Aufgabe 4

Entwickle die Taylorreihe von der Funktion $f(x) = xe^x$ um die Stelle $x = 0$.

Aufgabe 4 Entwickele die Taylorreihe von der Funktion $f(x) = xe^x$ um die Stelle $x = 0$.
Lösung

Wir wissen, dass die Taylorreihe von e^x um 0 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ ist.
Also ist $xe^x = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{n+1}$ die Taylorreihe von xe^x um $x = 0$. (10 Punkte)

Lösung: $x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{n+1}$

HS10 Probeprüfung Aufgabe 3

Betrachte die folgende Funktion: $f(x) := (1-x)\cdot e^x$. Berechnen Sie die Taylorreihe von f im Punkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 3
Betrachte die folgende Funktion:

$$f(x) := (1-x)\cdot e^x.$$

Berechnen Sie die Taylorreihe von f im Punkt $x_0 = 0$. *(2 Punkte)*

Wir kennen die Taylorreihe von $\exp(x)$ in $x_0 = 0$. Es ist somit:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{n!} - \tfrac{1}{(n-1)!}\right)\cdot x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1-n}{n!}\cdot x^n. \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-2)!\cdot n}. \end{aligned}$$

Lösung: (via e^x-Taylorreihe:) $1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n!}\cdot x^n$.

HS14 Übungsserie 10 - Aufgabe 3

Berechne die Taylorreihe von $\log(3+4x^2)$ um $x = 0$ und ihren Konvergenzradius.

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(3+4x^2) = \log(3(1+\frac{4x^2}{3})) = \log(3) + \log(1+\frac{4x^2}{3}) \\ &= \log(3) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{4x^2}{3}\right)^n}{n} \\ &= \log(3) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4/3)^n}{n}x^{2n} \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius in $y = x^2$ ist (z.B. mit Quotientenregel)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4/3)^n(n+1)}{(4/3)^{n+1}n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{4n} = \frac{3}{4}.$$

1

Also konvergiert die Reihe, falls $|x^2| < \frac{3}{4}$ und divergiert, falls $|x^2| > \frac{3}{4}$. Also ist der Konvergenzradius $\rho = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lösung: $\log(3+4x^2) = \log(3) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4/3)^n}{n}x^{2n}$ mit Konvergenzradius $\sqrt{3/4}$

HS14 Übungsserie 9 - Aufgabe 3 abgeändert

(a) Berechne das Taylorpolynom $T_2^3(f)$ für die Funktion $f(x) = \log(x)$ und finde eine Abschätzung von $|R_2^3 f(x)|$ für $|x-2| \leq \frac{1}{2}$.

(b) Berechne das Taylorpolynom $T_1^2(f)$ für die Funktion $f(x) = \sqrt[4]{x}$ und finde eine Abschätzung von $|R_1^2 f(x)|$ für $|x-1| \leq \frac{1}{2}$.

a) $f(x) = \log(x) \longrightarrow f(2) = \log(2)$

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \longrightarrow f'(2) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f''(2) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3} \longrightarrow f'''(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow T_2^3(f) = \log(2) + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1/4}{2}(x-2)^2 + \frac{1/4}{6}(x-2)^3$

$= \log(2) + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3$

$|R_a^n f| \leq \sup\limits_{x-a \in [-\ldots,+\ldots]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \cdot |x-a|^{(n+1)}$

$I = [\ ,\ ]$
aus der Aufgabenstellung

Abschätzung von $R_2^3 f$:

- $f^{(4)}(x)$ berechnen: $f^{(4)}(x) = -6x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$

- $\sup\limits_{x-2 \in [-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}]} \left|\frac{-6}{x^4}\right| = \sup\limits_{\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}} \frac{6}{x^4} \leftarrow$ streng monoton fallend
  $\hookrightarrow$ max bei $x = \frac{3}{2}$

$\sup\limits_{\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}} |f^{(4)}(x)| = \frac{6}{(\frac{3}{2})^4} = 6 \cdot \frac{16}{81} = \frac{32}{27}$

$\Rightarrow |R_2^3 f| \leq \frac{32/27}{4!} \cdot |x-2|^4 = \frac{4}{81} \cdot |x-2|^4$

b) $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ $\qquad f(1) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}}$ $\qquad f'(1) = \frac{1}{4}$

$f''(x) = -\frac{3}{16} x^{-\frac{7}{4}}$ $\qquad f''(1) = -\frac{3}{16}$

$$\Rightarrow T_1^2(f) = 1 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3/16}{2}(x-1)^2$$

$$|R_a^n f| \leq \sup_{x-a \in [-..,+..]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \cdot |x-a|^{(n+1)}$$

$I = [\ ,\ ]$
aus der Aufgabenstellung

Abschätzung von $R_1^2 f$:

- $f^{(3)}(x)$ berechnen: $f^{(3)}(x) = \frac{21}{64} x^{-11/4}$
- $\sup\limits_{x-1 \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]} \left| \frac{21}{64} x^{-11/4} \right| = \sup\limits_{\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}} \left| \frac{21}{64} \frac{1}{\sqrt[4]{x^{11}}} \right|$

$-\frac{1}{2} \leq x-1 \leq \frac{1}{2} \quad |+1$

streng monoton fallend
↳ max bei $x = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \sup_{\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}} |f^{(3)}(x)| = \frac{21}{64} \cdot 2^{11/4}$$

$$\Rightarrow |R_1^2 f| \leq \underbrace{\frac{\frac{21}{64} \cdot 2^{11/4}}{3!}}_{\leq \frac{\frac{21}{64} \cdot 8}{6} = \frac{21}{48} = \frac{7}{16}} \cdot |x-1|^3$$