Lagrange Optimierung

Wirtschaftsprüfung HS12: Finde das globale Maximum und das globale Minimum der Funktion $f(x, y) = 2x + y$ unter der Nebenbedingung $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1$.

Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Funktion f unter der Nebenbedingung ein globales Minimum und ein globales Maximum hat.

Lagrange - HS12 Aufgabe 3.2

NB: $\underbrace{\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1}_{NB} = 0$ ✓

Lagrangefunktion: $L = 2x + y - \lambda\left(\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1\right)$

i) Lagrange-Bedingungen:

$$L_x = 2 - x\lambda \overset{!}{=} 0$$
$$L_y = 1 - 2y\lambda \overset{!}{=} 0$$
$$-L_\lambda = \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 \overset{!}{=} 0$$

ii)

$$\left|\begin{array}{l} 2 - x\lambda = 0 \\ 1 - 2y\lambda = 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \rightarrow x\lambda = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{\lambda}} \\ \rightarrow 2y\lambda = 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2\lambda}} \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0 \quad | \cdot 4\lambda^2 \quad \Rightarrow 8 + 1 - 4\lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow 9 = 4\lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$
$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{x}_1 = \frac{2}{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \qquad \hat{y}_1 = \frac{1}{2\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$
$$\hat{x}_2 = \frac{2}{\left(-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{4}{3} \qquad \hat{y}_2 = \frac{1}{2\left(-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ Kandidaten für Extremalstellen sind (= stationäre Punkte)
$\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $\quad$ $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$f(x, y) = 2x + y$

$\hookrightarrow f\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$

$f\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -3$

$\Rightarrow$ globale Maximum bei $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$
globale Minimum bei $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

Problem 2

(i) Finde den Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ auf der Hyperbel $x^2+8xy+7y^2 = 225$, so dass das Quadrat des Abstandes zum Ursprung minimal ist.

///// Wir wollen die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$0 = g(x, y) = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225$$

minimieren. Wir definieren die folgende Funktion

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, \lambda) \mapsto f(x, y) - \lambda g(x, y).$$

Wir berechnen

$$\nabla F(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x - \lambda(2x+8y) \\ 2y - \lambda(14y+8x) \\ -x^2 - 8xy - 7y^2 + 225 \end{pmatrix}$$

Setzen wir den Gradienten gleich null, so erhalten wir das folgende Gleichungssystem

$$\begin{cases} x & = \lambda(x+4y) \\ y & = \lambda(4x+7y) \\ 225 & = x^2 + 8xy + 7y^2. \end{cases}$$

<u>Fall 1: $\lambda = 0$</u>

Aus der ersten Gleichung folgt, dass $x = 0$ und aus der zweiten Gleichung folgt $y = 0$, dies führt zu einem Widerspruch in der dritten Gleichung. Damit folgt, dass $\lambda \neq 0$.

<u>Fall 2: $\lambda \neq 0$</u>

Aus

$$x = \lambda(x+4y), \qquad y = \lambda(4x+7y)$$

folgt: Falls $x = 0$, dann $y = \frac{1-\lambda}{4\lambda}0 = 0$. Aber $(0,0)$ erfüllt nicht die dritte Gleichung. Damit folgt, dass $x \neq 0$. Analog erhalten wir, dass y nicht null sein kann. Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{4x+7y}{y} = \frac{x+4y}{x} &\Leftrightarrow 4x^2 + 7xy = xy + 4y^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 6xy - 4y^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x - y)(x + 2y) = 0. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $x = -2y$ oder $x = \frac{1}{2}y$.

Fall 2.1: $x = -2y$

Wir setzen in die dritte Gleichung ein und erhalten

$$225 = (-2y)^2 + 8(-2y)y + 7y^2 = 4y^2 - 16y^2 + 7y^2 = -5y^2.$$

Dies ist ein Widerspruch, da $-5y^2 \leq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Fall 2.2: $x = \frac{1}{2}y$

Wir setzen wieder in die dritte Gleichung ein und erhalten

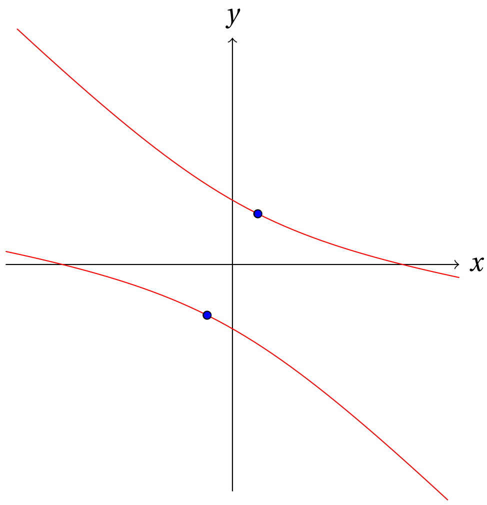
$$225 = \left(\frac{1}{2}y\right)^2 + 8\left(\frac{1}{2}y\right)y + 7y^2 = \frac{1}{4}y^2 + 4y^2 + 7y^2 = \frac{45}{4}y^2.$$

Damit erhalten wir

$$y = \pm\sqrt{\frac{225 \cdot 4}{45}} = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}.$$

Also haben wir genau zwei kritische Punkte

$$(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}), \qquad (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}).$$



Vom Graphen der Funktion sehen wir, dass wir zwei globale Minimalstellen haben.

/////

(ii) **Bonus (1 Punkt)** Finde den Punkt $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ auf der Hyperbel $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$, so dass der Abstandes zum Ursprung minimal ist.

Als Zusatz (nur falls jemand vorige Zeit hat...) - eher als HA gedacht

Problem 2 (4P)

Finde das Maximum und Minimum der Funktion $f(x,y,z) = 6x + 3y + 2z$ auf der Hyperbel $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 70$.

///// Wir wollen das Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x,y,z) = 6x + 3y + 2z$$

unter der Nebenbedingung

$$0 = g(x,y) = 4x^2 + 2y^2 + z^2 - 70$$

feststellen. Wir definieren die folgende Funktion

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z,\lambda) \mapsto f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z).$$

Wir berechnen

$$\nabla F(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 6 - 8x\lambda \\ 3 - 4y\lambda \\ 2 - 2z\lambda \\ -4x^2 - 2y^2 - z^2 + 70 \end{pmatrix}$$

Setzen wir den Gradienten gleich null, so erhalten wir das folgende Gleichungssystem

$$\begin{cases} 3 &= 4x\lambda \\ 3 &= 4y\lambda \\ 1 &= z\lambda \\ 70 &= 4x^2 + 2y^2 + z^2. \end{cases}$$

<u>Fall 1: $\lambda = 0$</u>
Aus den ersten drei Gleichung folgt, dass $\lambda = 0$ zu einem Widerspruch führt. Damit folgt, dass $\lambda \neq 0$.
<u>Fall 2: $\lambda \neq 0$</u>
Wenn $\lambda \neq 0$ dann folgt aus den ersten drei Gleichungen dass $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $z \neq 0$, da es andernfalls jeweils zu einem Widerspruch führt.
Wenn wir die zweite Gleichung mit 2 multiplizieren und von der ersten Gleichung abziehen, erhalten wir: $x = y$.
Setzen wir dieses Ergebnis in die dritte Gleichung ein erhalten wir $x = y = \frac{3}{4\lambda}$ und $z = \frac{1}{\lambda}$. Wir lösen nun die vierte Gleichung nach z auf und erhalten zwei Lösungen: $z = 4$ und $z = -4$, mit $\lambda = \frac{1}{4}$ und $\lambda = -\frac{1}{4}$.
Wir erhalten die Werte für das Maxima und Minima:

$$f(3,3,4) = 35 \qquad f(-3,-3,-4) = -35. \tag{1}$$

Problem 5 (4P)

Finde den maximalen und den minimalen Wert der Funktion

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2+y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$3x^2+4xy+6y^2=140.$$

///// Wir wollen die Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x,y)=3x^2+4xy+6y^2-140$ lösen. Dafür definieren wir

$$F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y).$$

Um die kritischen Punkte von F zu finden, müssen wir folgende Gleichung lösen

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\nabla F(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}2x-\lambda(6x+4y)\\2y-\lambda(4x+12y)\\-3x^2-4xy-6y^2+140\end{pmatrix}$$

Zuerst schliessen wir aus, dass $6x+4y=0$. In einem solchen Fall würde die erste Gleichung implizieren, dass $2x=0$ und damit würde folgen, dass $x=0=y$, was im Widerspruch zur dritten Gleichung steht. Analog schliesst man den Fall $4x+12y=0$ aus. Da $6x+4y\neq 0$ und $4x+12y\neq 0$ erhalten wir aus den ersten beiden Gleichungen

$$\lambda=\frac{2x}{6x+4y}=\frac{x}{3x+2y}, \qquad \lambda=\frac{2y}{2x+6y}.$$

Daraus folgt

$$2x^2+6xy=2y^2+3xy.$$

Damit erhalten wir

$$(2x-y)(x+2y)=2x^2+3xy-2y^2=0.$$

Es muss also gelten $2x=y$ oder $x=-2y$.

Fall 1: $2x=y$

Wir setzen in die dritte Gleichung ein und erhalten

$$35x^2=140 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2.$$

Dies ergibt die kritischen Punkte $(2,4,\frac{1}{7})$, und $(-2,-4,\frac{1}{7})$.

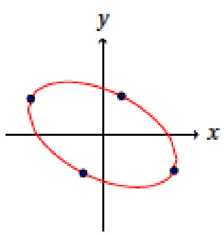
Fall 1: $x=-2y$

Wir setzen wieder in die dritte Gleichung ein und erhalten

$$10y^2=140 \Rightarrow y=\pm\sqrt{14}.$$

Dies ergibt die kritischen Punkte $(-2\sqrt{14},\sqrt{14},\frac{1}{2})$ und $(2\sqrt{14},-\sqrt{14},\frac{1}{2})$.

Unsere Nebenbedingung besagt, dass die Extrempunkte auf einer Ellipse liegen. Damit gibt es zwei Maximal- und zwei Minimalstellen



Wir berechnen

$$f(2,4)=f(-2,-4)=20, \qquad f(-2\sqrt{14},\sqrt{14})=f(2\sqrt{14},-\sqrt{14})=70.$$

Damit ist 20 der kleinste Wert, den f annehmen kann und 70 ist der grösste Wert, den f annehmen kann. Geometrisch bedeutet dies, dass die Punkte $\pm(-2\sqrt{14},\sqrt{14})$ maximale Distanz zum Ursprung haben und die Punkte $\pm(2,4)$ minimale Distanz.

/////

Wirtschaftsprüfung HS07: Gegeben ist die Optimierungsaufgabe

$$\text{Minimiere} \quad 2x + y \qquad \text{unter der Nebenbedingung} \quad xy^2 = 2.$$

Stellen Sie die Lagrange-Bedingungen auf und ermitteln Sie mit Hilfe der Lagrange-Methode den/die Kandidaten für eine lokale Extremalstelle.

Lagrange-HS07 Aufgabe 3.2

NB: $xy^2 = 2 \Rightarrow \underbrace{xy^2 - 2}_{NB} = 0$

Lagrangefunktion: $L = 2x + y - \lambda(xy^2 - 2)$

Lagrange-Bedingungen:

$L_x = 2 - y^2\lambda \stackrel{!}{=} 0$

$L_y = 1 - 2xy\lambda \stackrel{!}{=} 0$

$-L_\lambda = xy^2 - 2 \stackrel{!}{=} 0$

$$\left| \begin{array}{l} 2 - y^2\lambda = 0 \\ 1 - 2xy\lambda = 0 \\ xy^2 - 2 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \rightarrow y^2\lambda = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2}{y^2}} \\ \\ \rightarrow xy^2 = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{y^2}} \end{array}$$

$\Rightarrow 1 - 2xy\lambda = 1 - 2\left(\frac{2}{y^2}\right)y\left(\frac{2}{y^2}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{8}{y^3} = 1 \Rightarrow 8 = y^3 \Leftrightarrow 2^3 = y^3 \Rightarrow \boxed{\hat{y}_1 = 2}$

$\Rightarrow \hat{x}_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Kandidat für Extremalstelle: $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$