Implizite Funktion

Wirtschafts-Prüfung HS10 - Aufgabe 4.1:

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = (x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}, \quad x,y>0$. In einer Umgebung des Punktes $(x_0,y_0) = (2,4)$ ist durch die Gleichung $f(x,y) = \sqrt[3]{72}$ implizit eine differenzierbare Funktion $y = h(x)$ definiert.

Berechnen Sie $h'(2)$.

implizite Funktion: HS10 - 4.1 i)

$f(x,y) = (x^3+y^3)^{\frac{1}{3}} \left(-\sqrt[3]{72} = 0\right) \; x,y > 0$

Voraussetzung erfüllt

$(x_0, y_0) = (2,4)$

$f_x(x,y) = x^2 (x^3+y^3)^{-\frac{2}{3}}$

$f_y(x,y) = y^2 \; (x^3+y^3)^{-\frac{2}{3}}$

$x_0 = 2 \quad y_0 = 4$

$h'(2) = -\dfrac{f_x(2,4)}{f_y(2,4)} = -\dfrac{4\cdot(2^3+4^3)^{-2/3}}{16\cdot(2^3+4^3)^{-2/3}} = -\dfrac{4}{16} = -\dfrac{1}{4}$

Wirtschafts-Prüfung HS12 - Aufgabe 4.2 i):

Betrachten Sie die Funktion $g(x,y) = 2x^3 + 2xy + y^3, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

In einer Umgebung des Punktes $(x_0,y_0) = (1,1)$ ist durch die Gleichung $g(x,y) = 5$ implizit eine differenzierbare Funktion $y = h(x)$ definiert. Berechnen Sie $h'(1)$.

implizite Funktion: HS12 - 4.2. i)

$g(x,y) = 2x^3 + 2xy + y^3 \; (-5 = 0) \; (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Voraussetzung erfüllt ✓

$x_0 = 1 \quad y_0 = 1$

$g_x(x,y) = 6x^2 + 2y$

$g_y(x,y) = 2x + 3y^2$

$h'(1) = -\dfrac{6+2}{2+3} = -\dfrac{8}{5}$

Ableitung Umkehrfunktion

Aus Wirtschafts-Prüfung Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Berechnen Sie, falls möglich, die Ableitung der Umkehrfunktion $g^{-1}(y)$ an der Stelle $y = 0$.

c. Mit dem Satz zur Ableitung der Umkehrfunktion

$$(g^{-1})'(y_0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y_0))} = \frac{1}{g'(x_0)}$$

wobei $0 = y_0 = g(x_0) = \dfrac{1-x_0}{1+x_0}$, d.h. $1 - x_0 = 0$ und somit $x_0 = 1$, erhalten wir

$$(g^{-1})'(0) = -\frac{(1+x_0)^2}{2} = -2.$$