Grenzwerte

HS11 Probeprüfung Aufgabe 2 Es sei $a_n := \dfrac{5n^3+10}{n^3+3n+2}, n \in \mathbb{N}$. Untersuche, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent oder divergent ist, und berechne den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$, falls er existiert.

Lösung:

Es gilt für $n \geq 1$

$$a_n = \frac{5n^3+10}{n^3+3n+2} = \frac{n^3\left(5+\frac{10}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{5+\frac{10}{n^3}}{1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}}. \qquad \boxed{1}$$

Somit folgt mit den Grenzwertsätzen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{10}{n^3}}{1+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}} = \frac{5+0}{1+0+0} = 5. \qquad \boxed{1}$$

Daher ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$. $\boxed{1}$

HS10 Probeprüfung Aufgabe 5

(a) Geben Sie die Ableitung an von:

$$f(x) = \sin(\sqrt{1+e^{x^2}})$$

(b) Berechnen Sie: $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$. *Hinweis:* Benutzen Sie die Regel von Bernoulli-De L'Hôpital.

(a)

$$f'(x) = \cos(\sqrt{1+e^{x^2}}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+e^{x^2}}} \cdot e^{x^2} \cdot 2\,x$$

(b) Für Nenner und Zähler ist der Limes 0 für $x \to 0$, und beide sind differenzierbar in $x = 0$, somit können wir Bernoulli-De L'Hôpital anwenden:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot e^{x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0} e^{x^2} = e^{0^2} = 1.$$

Die vorletzte Gleichung folgt, da $\exp(x)$ und x^2 stetig sind.

HS07 Probeprüfung1 Aufgabe 4 Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, falls diese existieren:

(a) $\lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} \dfrac{n^2-n}{3n^2-1}$ (b) $\lim_{\mathbb{R}\ni x\to 1} \dfrac{x^2-x}{3x^2-1}$

keine ML vorhanden

HS15 Übungsserien 5 + 7 + 9

Berechne die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\left(\frac{n+1}{n^2-3n+1}\right)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\log_a x}{x^2-1}$; (e) $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\left(\frac{1}{n}\right)-\log_2\left(\frac{1}{n+1}\right)$ (f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}$;

(i) Da für eine konvergente Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n\to a$ und $a\neq 0$ gilt, dass $\log_2(a_n)\to\log_2(a)$, folgt

$$\lim_{n\to+\infty}\log_2\left(\frac{1}{n}\right)-\log_2\left(\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\log_2\left(\frac{n+1}{n}\right)=\log_2\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\right)=\log_2(1)=0\,.$$

(ii) Dasselbe gilt für den Sinus: $\sin(a_n)\to\sin(a)$ für eine konvergente Folge $a_n\to a$. Somit

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\left(\frac{n+1}{n^2-3n+1}\right)=\sin\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2-3n+1}\right)=\sin(0)=0\,.$$

(i)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log_e x}{x^2-1}\overset{(BH)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}\,.$$

(ii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{(BH)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\overset{(BH)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}\,.$$

(iii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\overset{(BH)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\overset{(BH)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0\,.$$

HS15 Übungsserie 6 - Aufgabe 3

Finde den Grenzwert der folgenden Folgen mit Hilfe des Sandwichsatzes.

(a) $a_n=\frac{1}{n}\sin(n)$ für $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ (b) $b_n=\frac{\sin(n)-2n}{2(3n+\cos(n))}$ für $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$

(i) Da $-1\leq\sin(x)\leq 1$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt

$$-\frac{1}{n}\leq a_n\leq\frac{1}{n}$$

für alle $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Da jedoch $\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ gilt somit

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=0\,.$$

(ii) Wir benützen wiederum, dass Sinus und Cosinus Betrag kleiner gleich 1 haben, also $-1\leq\sin(n),\cos(n)\leq 1$. Somit gilt (beachte, dass der Ausdruck negativ ist)

$$\frac{\sin(n)-2n}{2(3n+\cos(n))}\geq\frac{-1-2n}{2(3n-1)}\quad\text{und}\quad\frac{\sin(n)-2n}{2(3n+\cos(n))}\leq\frac{1-2n}{3n+1}\,.$$

Wir haben

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-1-2n}{2(3n-1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-\frac{1}{n}-2}{2(3-\frac{1}{n})}=-\frac{1}{3}$$

und

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-1-2n}{2(3n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-\frac{1}{n}-2}{2(3+\frac{1}{n})}=-\frac{1}{3}$$

und deshalb auch $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=-\frac{1}{3}$.