Kurvendiskussion

HS13 Probeprüfung Aufgabe 2 (gleiche wie HS15)

Betrachten Sie die Funktion $\log x - \arctan(x-1)$ auf dem Definitionsbereich $]0, +\infty[$.

a) Finden Sie die lokalen Maxima und Minima.

b) Diskutieren Sie die Monotonie der Funktion.

c) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to 0} f(x).$$

Besitzt die Funktion eine globale Maximumstelle? Besitzt sie eine globale Minimumstelle?

d) Zeigen Sie dass f genau zwei Nullstellen hat (Sie müssen die Nullstellen nicht *explizit* berechnen).

Lösung:

(i) Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1 + (x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

und

$$f''(x) = \frac{2(x-1)}{(x^2 - 2x + 2)^2} - \frac{1}{x^2}.$$

Man findet

$$f'(x) = 0 \iff x = 1, \text{ oder } x = 2,$$

wobei $f''(1) = -1 < 0$ und $f''(2) = \frac{1}{4} > 0$. Somit ist das lokale Maximum bei $x = 1$ mit $f(1) = 0$ und das lokale Minimum bei $x = 2$ mit $f(2) = \log 2 - \frac{\pi}{4}$.

(ii) Für $x > 2$ ist $(x-1)^2 + 1 > x$ und somit $f'(x) > 0$. Für $1 < x < 2$ ist $(x-1)^2 < (x-1)$, also $(x-1)^2 + 1 < x$ und somit $f'(x) < 0$. Für $0 < x < 1$ ist klarerweise $1 + (x-1)^2 > x$ und deshalb $f'(x) > 0$.
Zusamenfassend ist f auf $(0,1) \cup (2, +\infty)$ monoton wachsend und auf $(1,2)$ monoton fallend.

(iii) Es ist $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$, da der arctan beschränkt bleibt, der Logarithmus aber gegen $+\infty$ konvergiert. Da ausserdem $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ und der Logarithmus für $x \to 0$ gegen $-\infty$ konvergiert ist auch $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$. Somit besitzt f weder eine globale Maximum- noch eine globale Minimumstelle.

(iv) f ist auf $(0,1)$ streng monoton steigend und $f(1) = 0$. Auf $(1,2)$ ist f streng monoton fallend, kann also dort keine weiteren Nullstellen haben. Insbesondere gilt $f(2) < f(1) = 0$. Da

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty,$$

es gibt ein $x_0 > 2$, so dass $f > 0$ auf (x_0, ∞). Aus dem Zwischenwertsatz (f ist stetig) erfolgt die Existenz mindestens einer Nullstelle auf $(2, x_0]$. Da die Funktion auf $(2, \infty)$ streng monoton wächst, kann sie dort höchstens eine Nullstelle haben.

Als Zusatz (nur falls jemand vorige Zeit hat...) - eher als HA gedacht

Problem 2 (1P/1P/1P/1P)

Betrachte die Funktion $f:(0,\pi)\to\mathbb{R},\ x\mapsto\cot(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

(i) Berechne $f'(x)$.

///// Mit der Quotientenregel erhalten wir

$$f'(x)=\frac{(\cos(x))'\cdot\sin(x)-\cos(x)\cdot(\sin(x))'}{\sin^2(x)}=-\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)}=-\frac{1}{\sin^2(x)}$$

/////

(ii) Verifiziere, dass f injektiv ist.

///// Wir haben $f'(x)=-\frac{1}{\sin^2(x)}\leq-1<0$, damit ist f streng monoton wachsend und injektiv. Alternativ kann man die Injektivität auch direkt nachrechnen Seien $x_1,x_2\in(0,\pi)$ mit $f(x_1)=f(x_2)$. Dann berechnen wir

$$\begin{aligned}f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\frac{\cos(x_1)}{\sin(x_1)}=\frac{\cos(x_2)}{\sin(x_2)}&\Leftrightarrow\cos(x_2)\sin(x_1)-\cos(x_1)\cdot\sin(x_2)=0\\ &\Leftrightarrow\sin(x_1-x_2)=0\Leftrightarrow x_1-x_2=0\Leftrightarrow x_1=x_2.\end{aligned}$$

Wobei wir beim dritten Schritt benutzt haben, dass $x_1,x_2\in(0,\pi)$ impliziert, dass $x_1-x_2\in(-\pi,\pi)$. Da $x_1-x_2=2\pi n$ für ein $n\in\mathbb{Z}$ gelten muss, folgt $x_1-x_2=0$. /////

(iii) Verifiziere, dass f surjektiv ist.

Hinweis: Berechne $\lim_{x\downarrow 0}f(x)$, $\lim_{x\uparrow\pi}f(x)$.

///// Wir haben $\lim_{x\to 0}\cos(x)=1$ und $\lim_{x\downarrow 0}\sin(x)=0$ und $\cos(x)>0$ für $x\in(0,\pi/2)$. Damit gilt

$$\lim_{x\downarrow 0}f(x)=\lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=+\infty.$$

Wir haben $\lim_{x\uparrow\pi}\cos(x)=-1$ und $\lim_{x\uparrow\pi}\sin(x)=0$ und $\cos(x)<0$ für $x\in(\pi/2,\pi)$. Damit gilt

$$\lim_{x\uparrow\pi}f(x)=\lim_{x\uparrow\pi}\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=-\infty.$$

Da f stetig ist, folgt, dass f surjektiv ist. /////

(iv) Berechne die Ableitung der Inversen $f^{-1}:\mathbb{R}\to(0,\pi)$ von f.

///// Wir haben $f^{-1}:\mathbb{R}\to(0,\pi),\ y\mapsto\operatorname{arccot}(y)$

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{\cot'(f^{-1}(y))}=\frac{1}{-\csc^2(f^{-1}(y))}=-\frac{1}{\cot^2(f^{-1}(y))+1}=-\frac{1}{1+y^2},$$

wobei wir benutzt haben, dass $\cot(f^{-1}(y))=f(f^{-1}(y))=y$.

Problem 3 (1P/1P/2P)

Bestimme alle kritischen Punkte von folgenden Funktionen und entscheide, welche dieser kritischen Punkte lokale Maxima und welche lokale Minima sind. Welche von diesen sind globale Maxima und welche globale Minima.

(i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^3-3x$

///// Wir haben

$$f'(x)=3x^2-3.$$

Damit ist $x\in\mathbb{R}$ ein kritischer Punkt von f, falls $0=f'(x)=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$. Also sind $x\in\{-1,1\}$ die kritischen Punkte von f. Wir setzen nun die kritischen Punkte in die zweite Ableitung ein um zu überprüfen, ob es sich um Minima oder Maxima handelt.

$$f''(x)=6x.$$

Wir haben $f''(-1)=-6<0$ und damit hat f bei -1 ein lokales Maximum. Weiter haben wir $f''(1)=6>0$ und damit hat f bei 1 ein lokales Minimum. Es handelt sich weder um ein globales Minimum, noch um ein globales Maximum, da $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$. /////

(ii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \log(1+2x^2)$

///// Wir haben nach der Kettenregel

$$f'(x)=\frac{1}{1+2x^2}(2x^2)'=\frac{4x}{1+2x^2}.$$

Damit ist $x=0$ der einzige kritische Punkt von f. Wir setzen diesen in die zweite Ableitung ein. Diese berechnen wir mittels der Quotientenregel (F5.5)

$$f''(x)=\frac{(4x)'\cdot(1+2x^2)-4x\cdot(1+2x^2)'}{(1+2x^2)^2}=\frac{4(1+2x^2)-4x\cdot 4x}{(1+2x^2)^2}=\frac{-8x^2+4}{(1+2x^2)^2}.$$

Wir haben

$$f''(0)=\frac{4}{(1+0)^2}=\frac{4}{1}=4>0.$$

Damit hat f an der Stelle 0 ein lokales Minimum. Da $x\mapsto\log(x)$ monoton wachsend ist und $1\le 1+2x^2$ für alle $x\in\mathbb{R}$, folgt $f(0)\le f(x)$. Also ist hat f bei 0 ein globales Minimum. /////

(iii) $f:\mathbb{R}_{\ge 0}\to\mathbb{R},\ x\mapsto e^{\cos(x)}$.

///// Wir wissen dass $x\mapsto e^x$ streng monoton wachsend ist. Weiter ist $-1\le\cos(x)\le 1$.

Damit hat f ein lokales/globales Maximum genau dann, wenn $\cos(x)=1$. Also sind die globalen Maxima bei $\{0+\pi n\ :\ n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}\text{ gerade}\}$. Analog hat f seine lokalen/globalen Minima, wenn $\cos(x)=-1$ und damit hat f seine lokalen/globalen Minima bei $\{\pi+n\pi\in\mathbb{R}\ :\ n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}\text{ungerade}\}$.

Alternativ kann man folgendermaßen vorgehen. Mit der Kettenregel haben wir

$$f'(x)=e^{\cos(x)}\cdot(\cos(x))'=(-1)\sin(x)\cdot e^{\cos(x)}.$$

Da für alle $y\in\mathbb{R}$ gilt $e^y>0$, folgt, dass $f'(x)=0$ genau dann wenn $\sin(x)=0$. Also ist $\{0+\pi\cdot n\in\mathbb{R}\ :\ n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}\}$ die Menge aller kritischen Punkte von f. Wir setzen diese in die zweite Ableitung ein. Diese berechnen wir mittels der Produktregel und der Kettenregel

$$f''(x)=\left(e^{\cos(x)}\right)'\cdot(-1)\sin(x)+e^{\cos(x)}\cdot(-\sin(x))'=e^{\cos(x)}\cdot\sin^2(x)-e^{\cos(x)}\cos(x)$$

Wir erhalten für die kritischen Punkte

$$f''(0+\pi n)=-e^{\cos(0+\pi n)}\cos(0+\pi n)=\begin{cases}-e, & n \text{ gerade},\\ e^{-1}, & n\text{ ungerade}.\end{cases}$$

Damit sind alle Punkte der Form $\{0+n\pi\in\mathbb{R}\ :\ n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}\text{ gerade}\}$ lokale Maxima von f und alle Punkte der Form $\{0+n\pi\in\mathbb{R}\ :\ n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}\text{ ungerade}\}$ sind lokale Minima von f. /////