2-dim. Funktion

Wirtschafts-Prüfungaufgabe

a) Berechnen Sie den Gradienten. b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f und deren Art.

$$f(x,y) = x^2e^x + \frac{1}{2}(x-y)^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

HS11 - Aufgabe 3

3.2 $\quad F(x,y) = x^2e^x + \frac{1}{2}(x-y)^2 \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$F_x = 2xe^x + x^2e^x + 2 \cdot \frac{1}{2}(x-y)^1 \cdot (1)$$

$$F_x = e^x(2x+x^2) + (x-y)$$

$$F_y = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2}(x-y)^1 \cdot (-1)$$

$$F_y = -(x-y) = y-x$$

$$F_{xx} = e^x(2x+x^2) + e^x(2+2x) + 1$$

$$F_{xx} = e^x(2+4x+x^2) + 1$$

$$F_{yy} = 1$$

$$F_{xy} = -1$$

Extremas: $F_x = 0: \quad e^x(2x+x^2) + x - y = 0$

$F_y = 0: \quad y - x = 0 \Rightarrow \boxed{y=x}$

$$\Rightarrow e^x(2x+x^2) + x - x = e^x(2x+x^2) = 0$$

$$\underbrace{e^x}_{>0} \cdot x(2+x) = 0$$

$x_1 = 0 \quad\quad x_2 = -2$

$\downarrow \boxed{x=y} \quad\quad \downarrow \boxed{x=y}$

$y_1 = 0 \quad\quad y_2 = -2$

Max/Min/SP?: $\quad A = f_{xx}(x_1,y_1) \cdot f_{yy}(x_1,x_1) - (f_{xy}(x_1,y_1))^2$

$$= (\underbrace{e^0}_{1}(2)+1) \cdot (1) - (-1)^2 = 2 > 0 \Rightarrow \text{Max/Min}$$

$F_{xx}(x_1=0, y_1=0) = 3 > 0 \Rightarrow$ Min bei $(0,0)$

$A = F_{xx}(-2,-2) \cdot F_{yy}(-2,-2) - (F_{xy}(-2,-2))^2 = (\frac{-2}{e^2}+1) \cdot 1 - (-1)^2 = -\frac{2}{e^2} < 0 \Rightarrow$ SP

$\Rightarrow$ SP bei $(-2,-2)$

Lösung: a) $\nabla f = \left(x^2e^x + 2xe^x + x - y,\ y - x\right)^T$ b) (0,0): lokale Minimalsstelle, (-2,-2): Sattelpunkt

Aufgabe 8

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}.$$

1. (*3 Punkte*) Finden Sie alle lokalen und globalen Extrema. Von welchem Typ sind die Extrema?

2. (*1 Punkt*) Finden Sie auch alle lokalen und globalen Extrema von

$$g(x,y) = (4(x-2)^2 + (y+5)^2)e^{-(x-2)^2-4(y+5)^2}$$

und geben Sie auch hier an, von welchem Typ die Extrema sind. Tipp: benutzen Sie geschickt die erste Teilaufgabe. Dann gibt es keine langen Rechnungen.

1. Nach HHS p 344, nur innere Punkte:

$$\begin{cases} f_x = e^{-x^2-4y^2}\left(8x + (4x^2+y^2)(-2x)\right) = e^{-x^2-4y^2}\left(-8x^3+8x-2xy^2\right) \\ f_y = e^{-x^2-4y^2}\left(2y + (4x^2+y^2)(-8y)\right) = e^{-x^2-4y^2}\left(-8y^3+2y-32x^2y\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{xx} = e^{-x^2-4y^2}\left(-24x^2+8-2y^2+(-8x^3+8x-2xy^2)(-2x)\right) \\ \quad = e^{-x^2-4y^2}\left(-40x^2+16x^4+4x^2y^2+8-2y^2\right) \\ f_{yy} = e^{-x^2-4y^2}\left(-24y^2+2-32x^2+(-8y^3+2y-32x^2y)(-8y)\right) \\ \quad = e^{-x^2-4y^2}\left(64y^4-40y^2-32x^2+2+256x^2y^2\right) \end{cases}$$

1

$$f_{xy} = e^{-x^2-4y^2}\left(-4xy + (-8x^3+8x-2xy^2)(-8y)\right) = e^{-x^2-4y^2}\left(64x^3y-68xy+16xy^3\right)$$

$f_x \overset{!}{=} f_y \overset{!}{=} 0$ & $e^{-x^2-4y^2} > 0 \ \forall (x,y) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\text{I. } -4x^3+4x-xy^2 = 0 \\ &\text{II. } -4y^3+y-16x^2y = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &x(-4x^2+4-y^2) = 0 \\ &y(-4y^2+1-16x^2) = 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{F.U.}$$

(kl. Rechnungen)

NS sind nur folgende:

$$\underset{\alpha}{(0,0)},\ \underset{\beta}{(1,0)},\ \underset{\gamma}{(-1,0)},\ \underset{\delta}{(0,1/2)}$$

1 wenn mindestens 2 gefunden 1/2

Prüfungsnummer: ____ Name: ______________ Matrikelnummer: ______ __

Fortsetzung Aufgabe 8

α) $A(0,0) = 8 \cdot 2 - 0 = 16 > 0$ & $f_{xx} > 0 \Rightarrow$ rel. Minimum

β) $A(1,0) = (-16)(-30)e^{-2} - 0 > 0$ & $f_{xx} < 0 \Rightarrow$ ~~abl~~ Maximum

γ) $A(-1,0) = (-16)(-30)e^{-2} - 0 > 0$ & $f_{xx} < 0 \Rightarrow$ rel. Maximum

δ) $A(0,1/2) = 7.5 \cdot (-4)e^{-2} < 0 \Rightarrow$ kein rel. Extremum

$(0,0)$ ist absolutes Minimum & $(1,0)$ & $(-1,0)$ absolute Maxima; (*) (mit ~~...~~ $|x|, |y|$ ~~...~~ $\to \infty$ geht f gegen 0 (Ränder)) 1

2. Parallelverschiebung: 1/2

$(2,-5)$ rel. & absolutes Minimum

$(3,-5)$ rel & absolutes Maximum

$(1,-5)$ rel & absolutes Maximum

1/2

(*) gleicher Wert; beide doch Maximal!

MAT184 FS17 Übungsserie 14 Aufgabe 3

a) Berechnen Sie den Gradienten. b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f und deren Art.

c) Bestimme die zweiten Taylorpolynome in den kritischen Punkten.

$$f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy.$$

Aufgabe 3 Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^5 + y^5 - 5xy$$

(i) Berechne den Gradienten

///// $\nabla f(x, y) = (5x^4 - 5y, 5y^4 - 5x)$

(ii) Bestimme die kritischen Punkte von f und deren Art

///// Critical points (x, y), are points (x, y) where $\nabla f(x, y) = 0$. Hence $x^4 - y = 0$ and $y^4 - x = 0$. The only solutions to these equations are

$$(x, y) = (1, 1) \quad \text{and} \quad (x, y) = (0, 0).$$

The Hessian H_f of f is given by

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 20x^3 & -5 \\ -5 & 20y^3 \end{pmatrix}$$

Hence for $(x, y) = (0, 0)$

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

with characteristic polynomial given by $\lambda^2 - 25 = 0$. Hence the eigenvalues are $5, -5$. Hence $(x, y) = (0, 0)$ is a saddle point.

For $(x, y) = (1, 1)$

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 20 & -5 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}$$

with characteristic polynomial given by $(20 - \lambda)^2 - 25$, hence $(20 - \lambda) \in \{5, -5\}$. Hence the eigenvalues of $H_f(1, 1)$ are 15 and 25 and $(1, 1)$ is a local minimum.

(iii) Bestimme die 2ten Taylorpolynome in den kritischen Punkten.

///// Recall

$$T_a^2 f(x, y) = f(a) + \langle \nabla f(a), (x, y) - a \rangle + \frac{1}{2} \langle (x, y) - a, H_f((x, y) - a) \rangle$$

Hence

$$T^2_{(0,0)} f(x, y) = \frac{1}{2} \left\langle (x, y), \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} (x, y) \right\rangle = -5xy$$

and

$$T^2_{(1,1)} f(x, y) = -3 + \frac{1}{2} \left\langle (x - 1, y - 1), \begin{pmatrix} 20 & -5 \\ -5 & 20 \end{pmatrix} (x - 1, y - 1) \right\rangle = -3 + 10((x-1)^2 + (y-1)^2) - 5(x-1)(y-1)$$