



**MathCourses**

# **MAT182 Zwischenkurs 2**

## **„Integrieren“**

**Kursaufgaben**  
**(HS20)**

# Basics - Integrieren

Vorzeigen:  $\int \frac{3}{2x} + 1 \, dx$       $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin(x) - e^x + x^2 \, dx$

1.  $\int x^2 \, dx$  Lösung:  $\frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{3}x^3 + C$
2.  $\int -2x \, dx$  Lösung:  $-x^2 + C$
3.  $\int e^x - 1 \, dx$  Lösung:  $e^x - x + C$
4.  $\int \frac{1}{2}x^2 \, dx$  Lösung:  $\frac{1}{6}x^3 + C$
5.  $\int 2 \, dx$  Lösung:  $2x + C$
6.  $\int x + 1 \, dx$  Lösung:  $\frac{1}{2}x^2 + x + C$
7.  $\int \frac{1}{x} \, dx$  Lösung:  $\ln(|x|) + C$
8.  $\int_0^1 e^x \, dx$  Lösung:  $e^1 - 1 = e - 1$
9.  $\int_0^3 x^2 - 1 \, dx$  Lösung: 6
10.  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x) \, dx$  Lösung: -1
11.  $\int_{-2}^2 4 \, dx$  Lösung: 16
12.  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) - 1 + \frac{1}{x} \, dx$  Lösung:  $(-0 - \frac{\pi}{2} + \ln(\frac{\pi}{2})) - (-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} + \ln(\frac{\pi}{3})) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + \ln(\frac{3}{2})$
13.  $\int_{-1}^2 x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 \, dx$  Lösung:  $-\frac{21}{4}$

Repetition Kettenregel  $f(x) = f(u(x))$ :

Bestimme  $u(x)$  und  $f(u)$  (innere und äussere Funktion)

- $f(x) = (2 + x)^5$  Lösung:  $f(u) = u^5, u(x) = 2 + x$
- $f(x) = e^{2x}$  Lösung:  $f(u) = e^u, u(x) = 2x$
- $f(x) = \frac{1}{-x + 5}$  Lösung:  $f(u) = \frac{1}{u}, u(x) = -x + 5$

## Substitution

Vorzeigen:  $\int \frac{3 \sin(x)}{\cos^2(x)} dx$

1.  $\int x e^{-x^2} dx$

Lösung:  $-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C = -\frac{1}{2} \exp(-x^2) + C$

2.  $\int -9 \sin^2(x) \cos(x) dx$

Lösung:  $F(x) = -3 \sin^3(x) + C$

3.  $\int \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{(e^{2x} - e^{-2x})^3} dx$

Lösung:  $-\frac{1}{4(e^{2x} - e^{-2x})^2} + C$

4.  $\int_0^{1/6} \frac{6}{(1 - 3x)^2} dx$

Lösung: 2

5.  $\int e^{\frac{3}{2}x} dx$

Lösung:  $\frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}x} + C = \frac{2}{3} \exp(\frac{3}{2}x) + C$

6.  $\int_0^2 x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x} dx$

Lösung:  $-2 + 2e^{-1} = \frac{2}{e} - 2$

7.  $\int \frac{5}{3x - 2} dx$

Lösung:  $\frac{5}{3} \ln |3x - 2| + C$

8.  $\int \frac{(\ln |x|)^4}{x} dx$

Lösung:  $\frac{1}{5} (\ln |x|)^5 + C$

9.  $\int (x^3 + x^2)^{-2} (3x^2 + 2x) dx$

Lösung:  $\frac{-1}{x^3 + x^2} + C$

## Partielle Integration 1

Vorzeigen:  $\int x e^{-3x} dx$

1.  $\int x \cos(x) dx$

Lösung:  $x \sin(x) + \cos(x) + C$

2.  $\int x^3 \ln(x) dx$

Lösung:  $\frac{1}{4} x^4 \ln(x) - \frac{1}{16} x^4 + C$

3.  $\int x^2 e^{2x} dx$

Lösung:  $e^{2x} (\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4}) + C$

4.  $\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx$

Lösung:  $\frac{1}{4}$

5.  $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^4 \ln(2x) dx$

Lösung:  $\frac{1}{5} \ln(2) - \frac{31}{800}$

6.  $\int_0^\pi 3x^2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Lösung:  $6\pi^2 - 48$

## Partielle Integration 2

Vorzeigen:  $\int \sin(x) \cos(x) dx$

7.  $\int e^{2x} \cos(x) dx$

Lösung:  $e^{2x} \left( \frac{2 \cos(x)}{5} + \frac{\sin(x)}{5} \right) + C$

8.  $\int e^{-x} \sin(4x) dx$

Lösung:  $-\frac{1}{17} e^{-x} (4 \cos(4x) + \sin(4x)) + C$

9.  $\int_0^\pi e^{3x} \cos(x) dx$

Lösung:  $\frac{-3}{10} e^{3\pi} - \frac{3}{10}$

## Prüfungsaufgaben

### HS15:

1.  $\int x^5 \sin(3 + x^6) dx$  mittels Substitution!

Lösung:  $-\frac{1}{6} \cos(3 + x^6) + C$

2.  $\int \frac{x^2 + 4x + 3}{2x^2} dx$

Lösung:  $\frac{x}{2} + 2 \ln(|x|) - \frac{3}{2x} + C$

3.  $\int \frac{-x}{1 + x^2} dx$

Lösung:  $-\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$

### Rep-HS15:

1.  $\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx$

Lösung: 1

2.  $\int_0^{2\pi} -9 \sin^2(t) - 9 \cos^2(t) + \frac{t}{\pi^2} - \frac{1}{\pi} dt$

Lösung:  $-18\pi$

**HS14:**

1. Integriere mit der Substitutionsmethode:

$$\int \frac{1}{5x-4} dx$$

$$\text{Lösung: } \frac{1}{5} \ln(|5x-4|) + C$$

2. Integriere mit der Substitutionsmethode:

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$\text{Lösung: } -(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{a^2-x^2} + C$$

$$3. \int \frac{2xe^{5x}}{e^{4x}} dx$$

$$\text{Lösung: } 2xe^x - 2e^x + C = 2e^x(x-1) + C$$

$$4. \int \frac{1}{b^2+y^2} dy$$

$$\text{Lösung: Falls } b=0: y(x) = \frac{-1}{\frac{1}{3}x^3+a^2x+C},$$

$$\text{falls } b \neq 0: y(x) = b \cdot \tan\left(b\left(\frac{1}{3}x^3+a^2x+C\right)\right),$$

$$5. \text{ Berechne } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \text{ für } f(x) = \begin{cases} e^x & x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases}.$$

$$\text{Lösung: } e + 1$$

**Rep-HS14:**

$$1. \int_0^1 \frac{2x}{2+x^2} dx \text{ mittels Substitution!}$$

$$\text{Lösung: } \ln(3) - \ln(2) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$2. \int (t-2) \cdot \cos(t) dt \text{ mittels partieller Integration!}$$

$$\text{Lösung: } (t-2)\sin(t) + \cos(t) + C$$

$$3. \int_0^{4\pi} 16\cos^2(t) + 16\sin^2(t) + 9t \cdot 18t^2 dt$$

$$\text{Lösung: } 64\pi + \frac{81}{2} \cdot (4\pi)^4$$

**HS13:**

$$1. \int x^3 e^{-x} dx$$

$$\text{Lösung: } e^{-x}(-x^3 - 3x^2 - 6x - 6) + C$$

$$2. \int \frac{1}{(2-t)^2} dt$$

$$\text{Lösung: } \frac{1}{2-t} + C$$

$$3. \int x^3 e^{-x^2} dx \text{ (***) schwer}$$

$$\text{Lösung: } -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1) + C$$

$$4. \int 5xe^x dx$$

$$\text{Lösung: } 5xe^x - 5e^x + C = 5e^x(x-1) + C$$

# Übungsaufgaben

1.  $\int 3x^2 + \sin(x) - e^x \, dx$  Lösung:  $x^3 - \cos(x) - e^x + C$
2.  $\int \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2x} + \sqrt[3]{x} \, dx$  Lösung:  $-\frac{1}{3x} + \frac{1}{2} \ln(|x|) + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$
3.  $\int \sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx$  Lösung:  $\frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} - \frac{5}{4} x^{\frac{4}{5}} + C$
4.  $\int \frac{2}{x} - \frac{t}{x^2} \, dx$  Lösung:  $2 \ln(|x|) + \frac{t}{x} + C$
5.  $\int_0^{2\pi} -\sin(4x) + \frac{1}{2} \sin(2x) \, dx$  Lösung: 0
6.  $\int_0^1 1 \cdot \ln(x) \, dx$  mittels partieller Integration! Lösung: -1
7.  $\int_{-\infty}^0 e^x \, dx$  Lösung: 1
8.  $\int_{-\infty}^{\infty} |xe^{-x^2}| \, dx$  Lösung: 1
9.  $\int (x-1) \sin(x) \, dx$  Lösung:  $(1-x) \cos(x) + \sin(x) + C$
10.  $\int x^2 \cos(x) \, dx$  Lösung:  $x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + C$
11.  $\int (1-x) \sqrt{x} \, dx$  Lösung:  $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + C$
12.  $\int \frac{dt}{t+1}$  Lösung:  $\ln|t+1| + C$
13.  $\int s^2 (s^3 + 1)^9 \, ds$  Lösung:  $\frac{1}{30} (s^3 + 1)^{10} + C$
14.  $\int \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}} \, dx$  Lösung:  $2e^{\sqrt{x}+1} + C$
15.  $\int x^2 e^{-x} \, dx$  Lösung:  $e^{-x} (-x^2 - 2x - 2) + C$
16.  $\int 2^x \, dx$  Lösung:  $\frac{1}{\ln(2)} 2^x + C$
17.  $\int e^{\sin(x)} \cos(x) \, dx$  Lösung:  $e^{\sin(x)} + C$
18.  $\int \sin(x) e^{-x} \, dx$  Lösung:  $-\frac{1}{2} e^{-x} (\cos(x) + \sin(x)) + C$
19.  $\int_1^4 \frac{\sqrt{t} + 4}{t^2} \, dt$  Lösung: 4
20.  $\int_0^1 \frac{8\sqrt{1-x^2}}{\pi} \, dx$  Lösung: 2