	$\mathbf{x^{-r} = \frac{1}{x^r}}$	$\mathbf{\sqrt[n]{x^k} = x^{\frac{k}{n}}}$	$\mathbf{x^a \cdot x^b = x^{a+b}}$	$\mathbf{\frac{e}{\left(\frac{f}{g}\right)} = \frac{\left(\frac{e}{1}\right)}{\left(\frac{f}{g}\right)} = \frac{e}{1} \cdot \frac{g}{f}}$	$\mathbf{(x^a)^c = x^{a \cdot c}}$
1.	$\frac{1}{x^2} =$	$\sqrt{x} =$	$x^7 \cdot x^3 =$	$\frac{8}{\frac{3}{5}} =$	$\left(x^3\right)^2 =$
2.	$\frac{1}{x^5} =$	$\sqrt[3]{x} =$	$x \cdot \sqrt{x} =$	$\frac{4}{\frac{2}{x^2}} =$	$\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^5 =$
3.	$\frac{3}{x^2} =$	$\sqrt[5]{x^4} =$	$\sqrt[4]{x^3} \cdot x^{-2} =$	$\frac{1}{\frac{x}{3}} =$	$\sqrt[7]{x^{\frac{5}{2}}} =$
4.	$\frac{1}{3x^2} =$	$\sqrt{4x} =$	$\mathbf{x^a : x^b = \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}}$	$\frac{x}{\frac{5}{4}} =$	$\left(\sqrt{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right)^2 =$
5.	$\frac{11}{13x^5} =$	$\sqrt[4]{16x^8} =$	$\frac{x^5}{x^3} =$	$\frac{3x}{\frac{3}{7}} =$	$\left(4x^5\right)^2 =$
6.	$\frac{2}{x^{-3}} =$	Formel rückwärts angewendet $x^{\frac{2}{3}} =$	$\frac{x^{12}}{x^4} =$	$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{2}{9}} =$	$\left(\frac{\frac{x^2}{3}}{\frac{3}{x^{-5}}}\right)^{\sqrt{3}} =$
7.	$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} =$	Formel rückwärts angewendet $4x^{-\frac{5}{2}} =$	$\frac{2x^3}{x^6} =$	$\frac{\frac{13x}{5}}{\frac{2}{3}} =$	

$\ln(\mathbf{a}) + \ln(\mathbf{b}) = \ln(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$	$\ln(\mathbf{a}) - \ln(\mathbf{b}) = \ln\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)$	$\mathbf{c} \cdot \ln(\mathbf{a}) = \ln\left(\mathbf{a}^{\mathbf{c}}\right)$	$\sqrt{\mathbf{a}} \cdot \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$	**Wissen**
$\ln(y) + \ln(y^2) =$	$\ln(y) - \ln(y^2) =$	$3\ln(y) =$	$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3} =$	$x^0 =$
$\ln(y) + \ln(3) =$	$\ln(z) - \ln\left(\frac{1}{5}\right) =$	$-\ln(a) =$	$\sqrt{4x^3} =$	$\ln(1) =$
$\ln\left(\frac{x}{3}\right) + \ln(12xy) =$	$\ln(u) - \ln\left(3\sqrt{u}\right) =$	$-\frac{1}{4}\ln(16x^2) =$	$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x^3} =$	$e^0 =$
$\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2}$	$\mathbf{a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2}$	$\mathbf{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$	$\frac{\sqrt{\mathbf{a}}}{\sqrt{\mathbf{b}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}$	**Fehler-quellen**
$(x+3)^2 =$	$(2y-1)^2 =$	$(y^3+11)(y^3-11) =$	$\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^9}} =$	$\sqrt{a+b}$ $=$
$y^2 + 2y + 1 =$	$x^2 - 10x + 25 =$	$b^2 - 1 =$	$\frac{\sqrt{4x^2}}{\sqrt{3x}} =$	
$y^4 + 4y^2 + 4 =$	$a^2 - a + \frac{1}{4} =$	$9x^4 - 25 =$	$\frac{\sqrt{x^4-16}}{\sqrt{x+2}} =$	$\frac{\ln(x^2)}{\ln(x)}$ $=$

Vorzeigeaufgaben: $f(x)=\frac{3e^x}{5}+x-\sqrt{x}-3$ $g(x)=\ln(x)\cos(x)$ $h(x)=\frac{10^x}{4x-3}$ $k(x)=e^{x^3}$

Grundwissen

1. $f(x)=x^n$ Lösung: nx^{n-1}
2. $f(x)=\frac{1}{x^3}$ Lösung: $-3x^{-4}$
3. $f(x)=\frac{5}{6x^2}$ Lösung: $\frac{-5}{3x^3}$
4. $f(x)=\sin(x)$ Lösung: $\cos(x)$
5. $f(x)=3\cos(x)$ Lösung: $-3\sin(x)$
6. $f(x)=\frac{e^x}{2}$ Lösung: $\frac{e^x}{2}$
7. $f(x)=\ln(x)$ Lösung: $\frac{1}{x}$
8. $f(x)=\sqrt{x}$ Lösung: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Produktregel

1. $f(x)=xe^x$ Lösung: $e^x+xe^x=e^x(x+1)$
2. $f(x)=(3x^2+x-2)e^x$ Lösung: $e^x(3x^2+7x-1)$
3. $f(x)=x^2\sin(x)$ Lösung: $2x\sin(x)+x^2\cos(x)$
4. $f(x)=(x^2-2)\sin(x)$ Lösung: $2x\sin(x)+(x^2-2)\cos(x)$
5. $f(x)=x^3\cos(x)$ Lösung: $3x^2\cos(x)-x^3\sin(x)$
6. $f(x)=(x^3-2x+1)\cos(x)$ Lösung: $(3x^2-2)\cos(x)-(x^3-2x+1)\sin(x)$

Quotientenregel

1. $f(x)=\frac{x^2+1}{2x+3}$ Lösung: $\frac{2x^2+6x-2}{(2x+3)^2}$
2. $f(x)=\frac{x}{x-1}$ Lösung: $\frac{-1}{(x-1)^2}$
3. $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ Lösung: $\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$
4. $f(x)=\frac{e^x}{x^3}$ Lösung: $\frac{e^x(x-3)}{x^4}=\frac{e^x x^3-3x^2e^x}{x^6}$
5. $f(x)=\frac{3x}{x^2-1}$ Lösung: $\frac{-3x^2-3}{(x^2-1)^2}=\frac{-3(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$
6. $f(x)=\frac{2x}{(x-1)^2}$ Lösung: $\frac{2(x-1)^2-2x(2(x-1))}{(x-1)^4}=\frac{-2(x+1)}{(x-1)^3}$
7. $f(x)=\frac{x^2}{\cos(x)}$ Lösung: $\frac{2x\cos(x)+x^2\sin(x)}{\cos^2(x)}$
8. $f(x)=\frac{x^2+2x}{\ln(x)}$ Lösung: $\frac{(2x+2)\cdot\ln(x)-x-2}{(\ln(x))^2}$

Kettenregel

1. $f(x) = (x^2+1)^3$ Lösung: $6x(x^2+1)^2$
2. $f(x) = (2x^2+3x-1)^3$ Lösung: $(12x+9)(2x^2+3x-1)^2$
3. $f(x) = \sqrt{3x-1}$ Lösung: $\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$
4. $f(x) = \sqrt{2x^2+x-3}$ Lösung: $\frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x-3}}$
5. $f(x) = \sin(x^2-3x)$ Lösung: $(2x-3)\cos(x^2-3x)$
6. $f(x) = \cos(x^3+1)$ Lösung: $-3x^2\sin(x^3+1)$
7. $f(x) = e^{3x-1}$ Lösung: $3e^{3x-1}$
8. $f(x) = e^{-x^2}$ Lösung: $-2xe^{-x^2}$
9. $f(x) = 10^{-x}$ (Formel für $(a^x)'$ nachschauen!) Lösung: $-\ln(10)\cdot 10^{-x}$
10. $f(x) = \ln(2x-3)$ Lösung: $\frac{2}{2x-3}$

Vermischt 1

1. $\frac{3}{\cos(x)}$ Lösung: $\frac{3\sin(x)}{\cos^2(x)}$
2. $\frac{x^2}{\ln(x)}$ Lösung: $\frac{2x\ln(x)-x}{(\ln(x))^2}$
3. $\cos(\sqrt{x})$ Lösung: $\frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$
4. $\cos^3(x)$ Lösung: $-3\sin(x)\cos^2(x)$
5. e^{2x} Lösung: $2e^{2x}$
6. $\ln(3x)$ Lösung: $\frac{1}{x}$
7. $3x\cos(x)$ Lösung: $3\cos(x)-3x\sin(x)$
8. e^{x^2} Lösung: $2xe^{x^2}$
9. $\sin(3x^2)$ Lösung: $6x\cos(3x^2)$
10. $\frac{x^2}{-x^3+6x-4}$ Lösung: $\frac{x^4+6x^2-8x}{(-x^3+6x-4)^2}$

Vorzeigeaufgabe: $f(x) = \ln(2x)e^{1-4x}$

Kettenregel und Produktregel

1. $f(x) = x\ln(x^2+3)$ Lösung: $\ln(x^2+3) + \frac{2x^2}{x^2+3}$
2. $f(x) = (2x-1)\ln(x+1)$ Lösung: $2\ln(x+1) + \frac{2x-1}{x+1}$
3. $f(x) = x\ln(x) - x$ Lösung: $\ln(x)$
4. $f(x) = (x^2-2)e^{-x}$ Lösung: $(-x^2+2x+2)e^{-x}$
5. $f(x) = xe^{x^2-1}$ Lösung: $(2x^2+1)e^{x^2-1}$
6. $f(x) = (x^2-2)\sqrt{3x-1}$ Lösung: $2x\sqrt{3x-1} + \frac{3(x^2-2)}{2\sqrt{3x-1}}$

Vermischt 2

1. $f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3}$ Lösung: $2(x+a-e^{2x-3})$
2. $f(x) = (1-e^{ax})^2$ Lösung: $-2ae^{ax}(1-e^{ax})$
3. $f(x) = \left(e^{2x}+e^{-x}\right)^2$ Lösung: $2(e^{2x}+e^{-x})(2e^{2x}-e^{-x})$
4. $f(x) = (x+1)e^x$ Lösung: $(x+2)e^x$
5. $f(x) = (3-2x)e^{-\frac{1}{2}x}$ Lösung: $(x-\frac{7}{2})e^{-\frac{x}{2}}$
6. $f(x) = a(x-3)e^{4x-3}$ Lösung: $(4ax-11a)e^{4x-3}$
7. $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$ Lösung: $\frac{-x^2+2x-1}{e^x}$
8. $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ Lösung: $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$
9. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ Lösung: $\frac{-1}{(x-1)^2}$
10. $f(x) = \frac{1}{x}(x^2-4)$ Lösung: $1+\frac{4}{x^2}$

Übungsaufgaben

1. $f(x) = (\ln(x))^2$ Lösung: $\frac{2\ln(x)}{x}$
2. $f(x) = e^{\sqrt{1+\sin(x)}}$ Lösung: $e^{\sqrt{1+\sin(x)}}\frac{\cos(x)}{2\sqrt{1+\sin(x)}}$
3. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{4x}+1$ Lösung: $2x\sqrt[3]{4x} + x^2(\frac{4}{3}(4x)^{-2/3})$
4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ Lösung: $\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^4}}$
5. $f(x) = e^{(\ln(x))^2+C}$ Lösung: $\frac{2\ln(x)}{x}e^{(\ln(x))^2+C}$
6. $f(x) = \left(\sin(x^2)\right)^3$ Lösung: $6x\cos(x^2)\left(\sin(x^2)\right)^2$
7. $f(x) = \left(\sin(\cos(x^3+1))\right)^2$ Lösung: $-6x^2\left(\sin(\cos(x^3+1))\right)\cdot\cos\left(\cos(x^3+1)\right)\cdot\sin(x^3+1)$

8. $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \ln(x+1)$ Lösung: $f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}$

9. $f(x) = 3e^{-x} - 3xe^{-x}$ Lösung: $f'(x) = -6e^{-x} + 3xe^{-x}$

10. $f(x) = (a+bx)e^{-2x}$ Lösung: $f'(x) = (-2a + b - 2bx)e^{-2x}$

11. $f(x) = (a\sin(2x) + b\cos(2x))\, e^x$ Lösung: $f'(x) = (2a\cos(2x) - 2b\sin(2x) + a\sin(2x) + b\cos(2x))\, e^x$

Prüfungsaufgaben

a) $f(x) = \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) e^{x^2}$

b) $h(x) = y_1(x)^2 \cdot y_2(x)^2$

c) $f(x) = e^{-(x-3)^2}$. Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$

d) $f(x) = xe^{x-1} + 1$. Bestimme $f'(x)$ und $f''(x)$.

e) $f(x) = \sqrt{e^{x^3}} + \sin(x)$

f) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

g) $f(x) = e^{x^3} \ln(x^2)$

h) $f(x) = e^{-x^2+x}$. Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$

i) $f(x) = \sin\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right)$

Lösungen Prüfungsaufgaben:

a) $f'(x) = \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) xe^{x^2} + \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) e^{x^2} 2x = xe^{x^2}\left(\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)$

b) $h'(x) = 2y_1(x)y'(x) \cdot y_2(x)^2 + y_1(x)^2 \cdot 2y_2(x)y_2'(x)$

c) $f'(x) = e^{-(x-3)^2}(6-2x),\ f''(x) = e^{-(x-3)^2}\left((6-2x)^2 - 2\right) = e^{-(x-3)^2}(4x^2 - 24x + 34)$

d) $f'(x) = e^{x-1}(x+1),\ f''(x) = e^{x-1}(x+2)$

e) $\frac{3x^2 e^{x^3}}{2\sqrt{e^{x^3}}} + \cos(x) = \frac{3}{2}x^2\sqrt{e^{x^3}} + \cos(x)$

f) $0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

g) $f'(x) = e^{x^3}\left(3x^2\ln(x^2) + \frac{2}{x}\right)$

h) $f'(x) = e^{-x^2+x}(-2x+1), f''(x) = e^{-x^2+x}(4x^2 - 4x - 1)$

i) $\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right)$

Vorarbeit - Vektorgeometrie Grundlagen

HS12 - Aufgabe 2:

Wie lautet die Gleichung der Ebene, welche durch die drei Punkte A(0,0,1), B(0,1,0) und C(1,0,0) geht?

Lösung: $x + y + z - 1 = 0$

Rep-HS15 - Aufgabe 1h) :

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ seien definiert als $\vec{e}_1 := (5,0,0)$ und $\vec{e}_2 := (0,2,3)$. Welchen Vektor erhält man, wenn man das Kreuzprodukt von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ bildet und den resultierenden Vektor noch um den Faktor 3 streckt?

Lösung: $(0,\ -45,\ 30)^T$

HS17 - Aufgabe 2a): Gegeben seien neben Ursprung $O(0,0,0)$ auch die Punkte $A(1,1,1)$ und $B(0,2,0)$. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{OA}$ und $\vec{OB}$.

Lösung: a) $\varphi = \arccos(1/\sqrt{3})$

Rep-HS15 - Aufgabe 2 :

a) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten (0,0,1), (0,1,0), (0,0,3).

b) Geben Sie die Cosinus' der drei Winkel des Dreiecks an (kürzen soweit möglich).

Lösung: a) 1 b) in (0,0,1): $\cos(\alpha) = \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

in (0,1,0): $\cos(\beta) = \frac{4}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ in (0,0,3): $\cos(\gamma) = \frac{3}{\sqrt{10}}$

HS15 - 1-Minuten Fragen :

b) Sie haben 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Beschreiben Sie in natürlicher Sprache, in welchen Fällen das Skalarprodukt 0 ist.

c) Folgt aus $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}$ dass auch $\vec{b} = \vec{c}$? Wenn ja, beweisen Sie es, wenn nein, geben Sie ein einfaches Gegeneispiel an.

Lösung: b) wenn $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ Nullvektoren sind; Oder $\vec{a} \perp \vec{b}$ (senkrecht)

c) Nein! (nicht wenn $\vec{a}$ der Nullvektor ist)

Rep-HS13 - Aufgabe 2: Wir legen durch die drei Punkte $(1,0,0), (0,1,0)$ und $(0,0,1)$ eine Ebene.

a) Machen Sie dazu eine Skizze und geben Sie einen Normalenvektor der Länge 1 zur Ebene an (Herleitung wegen schöner Zahlen und Skizze nicht nötig).

b) Geben Sie noch einen zweiten, anderen Normalenvektor der Länge 1 zur Ebene an.

c) Wie sieht die Ebenengleichung aus?

d) Welche Winkel hat die Ebene zur xy-Ebene? [Es ist nicht 45!; sie können den trigonometrischen Ausdruck stehen lasssen]

Lösung: a) $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$ b) $\vec{n}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$

c) $x + y + z - 1 = 0$ d) $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$