MathCourses

MAT182-PVK

Kursunterlagen

(HS20)

Substitutionsmethode

Vorzeigeaufgabe: $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{x\ dx}{\cos^2(x^2)}$

1. $\int x^5 \sin(3+x^6)\ dx$

2. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} dx$

3. $\int \sin(x)\cos^2(x) dx$

4. $\int_0^2 \frac{4}{4-x} dx$

Lösung: 1. $-\frac{1}{6}\cos(3+x^6)+C$ 2. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 3. $-\frac{1}{3}\cos^3(x)+C$ 4. $-4\ln(2)+4\ln(4)) = \ldots = \ln(16)$

Partielle Integration

Vorzeigeaufgaben: $\int x^2 e^{-x} dx$ $\int \sin(x)\cos(x) dx$

1. $\int xe^x dx$
2. $\int x^2 \sin(x) dx$
3. $\int_{0.5}^1 x^2 \ln(2x) dx$

Lösung: 1. $(x-1)e^x + C$ 2. $-x^2\cos(x)+2x\sin(x)+2\cos(x)+C$ 3. $\frac{1}{3}\ln(2)-\frac{7}{72}$

Beliebige Integrale

a) Berechnen Sie $\int_0^2 e^{1-x} dx$.

b) Berechnen Sie $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} dx$. Formen Sie am Schluss so weit um, wie es ohne Taschenrechner geht.

c) Berechnen Sie $\int \frac{x^2+4x+3}{2x^2} dx$

Lösung: a) $e-e^{-1}$ b) $\ln(4+\sqrt{12})-\ln(2)\ \left(=\ln(2+\sqrt{3})\right)$
c) $\frac{x}{2}+2\ln(|x|)-\frac{3}{2x}+C$

Zusatz: Rotationsvolumen Vorzeigeaufgabe: Rotationsvolumen für $f(x)=e^{-x}$ von $x\in[0,1]$.

neue Aufgabe: Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der von $x=0.5$ bis $x=2$ entsteht, wenn man die Funktion $f(x)=\sqrt{x}$ um die x-Achse rotieren lässt.

Lösung: $\frac{15}{8}\pi$

Kurvendiskussion

Vorzeigeaufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-x^3+9x^2-24x+16}$, $x \in [0,3]$

Bestimmen Sie alle Stellen, an denen f ein Extremum annimmt. Zusatz: Wie sieht es bei $x \in \mathbb{R}$ aus?

Polynomdivision: Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

Lösung: NS bei $x = 1, x = 2, x = -2$

Rep-HS17 - Aufgabe 4: * (NS + WP fies - siehe Loe)

Führen Sie für $f(x) = x^4 - 2x - 6$ für $x \in [0,1]$ eine vollständige Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte).

Lösung: keine NS, keine Wendepunkte,
glob. Min. bei $(2^{-1/3}, 2^{-4/3} - 2^{2/3} - 6)$, glob. Max bei $(0, 6)$, lok. Max bei $(1, -7)$

HS17 - Aufgabe 3: a) Leiten Sie die Funktion $\sin^2\left(e^{\sqrt{x}}\right)$ nach x ab, $x > 0$.

b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - 2$ systematisch auf Extremalstellen $x \in [0,2]$.
Überlegen Sie sich, ob es Sinn macht, die ganze ursprüngliche Funktion f selber zu untersuchen.

Lösung: a) $\sin\left(e^{\sqrt{x}}\right) \cdot \cos\left(e^{\sqrt{x}}\right) \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ b) Maximum bei $x = 2$, Minimum bei $x = 0$

Rep-HS14 - Aufgabe 3: Welche Bedingungen müssen a, b, c erfüllen, damit $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a) in keinem Punkt, b) in einem Punkt, c) in zwei Punkten waagrechte Tangenten besitzt?

Lösung: a) $4b^2 - 12ac < 0$ b) $4b^2 - 12ac = 0$ c) $4b^2 - 12ac > 0$

Vorzeigeaufgabe: **Prüfung HS11 - Aufgabe 4c)**

Wir definieren die Funktion $g(x) = \sqrt{2x^2 + 8} - 2x$, $D(g) = \mathbb{R}$. Welcher Punkt P auf dem Graphen von g hat minimalen Abstand zu dem Punkt $Q(1,0)$?

***Übungen*:**

Gegeben sei $\vec{x}(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ (t-1)^2 \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 1$. Wann ist die Schnelligkeit am Grössten / wann am Kleinsten?

Lösung: (globales) Minimum bei $t = 0.5$ mit $v(0.5) = \sqrt{3}$ und (globales) Maximum bei $t = 0$ sowie $t = 1$ mit $v(0) = v(1) = \sqrt{5}$.

HS15 - Aufgabe 3a) Welche Punkte auf der Parabel $y = x^2$ haben den kleinsten Abstand vom Punkt (0, 2)?

Lösung: Minimum bei $\left(-\sqrt{\frac{6}{4}}, \frac{6}{4}\right)$ und $\left(\sqrt{\frac{6}{4}}, \frac{6}{4}\right)$

Separierbare Differentialgleichungen

Vorzeigeaufgabe: Gegeben ist die Differentialgleichung $y'(x^2+1) = (1-y)x^2$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung.

b) Finden Sie die spezielle Lösung, welche durch den Punkt $(0,2)$ geht.

c) Bestimmen Sie alle konstanten (=stationären) Lösungen sowie, falls vorhanden, die singulären Lösungen.

HS15 - Aufgabe 6:

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

1) $y^2y' = x$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

2) $(1+x^2)y' + xy = 0$. (*)

Lösung: 1. $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2+1}$ 2. $y = \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}$ $\left(= Ke^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}\right)$ $K \in \mathbb{R}$.

HS13 - Aufgabe 5:

Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = (2-y)^2x^2$. Geben Sie die allgemeine Lösung an.

Geben Sie die spezielle Lösung an mit $x = 0, y = 0$. Hat es noch singuläre Lösungen?

Lösung: $y(x) = 2 - \dfrac{1}{\left(\frac{x^3}{3}+C\right)}$ $C \in \mathbb{R}$, $y(x) = 2 - \dfrac{1}{\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\right)}$, Ja: $y = 2$.

Rep-HS16 - Aufgabe 3:

Die Funktion $y = \sqrt{x}$ ist Lösung welcher der nachfolgenden DGL, mit Kontrollrechnung bitte?

a) $y' = 2y$ b) $y' = y^2$ c) $y' = \dfrac{2}{y}$ d) $y' = \dfrac{1}{2y}$

Lösung: d) $y' = \dfrac{1}{2y}$

$y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y}$

HS14 - Aufgabe 6: * (wird gemeinsam nachbesprochen)

Lösen Sie folgende Differentialgleichung:

1. $y' = (a^2+x^2)(b^2+y^2)$ wo a, b beliebige reelle Zahlen.
2. Finden Sie die spezielle Lösung, welche durch den Punkt (1,2) geht.

Lösung:

1. Für $b \neq 0$: $y = \tan\left(b \cdot \left(\frac{x^3}{3} + a^2x + C\right)\right) \cdot b$ und für $b = 0$: $y = -1/(x^3/3 + a^2x + C)$.
2. spez. Lös für $b \neq 0$: $y = \tan\left(b \cdot \left(\frac{x^3}{3} + a^2x + \frac{\arctan(2/b) - b/3 - a^2b}{b}\right)\right) \cdot b$ und für $b = 0$: $y = -1/(x^3/3 + a^2x - 5/6 - a^2)$

In/homogene lineare DGL

Vorzeigeaufgabe: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{1+x^2} + e^{-\arctan(x)}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie die spezielle Lösung der obigen Differentialgleichung an, für welche gilt $y'(0) = a$.

HS12 - Aufgabe 6:

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' + 2y = e^{-x}$.

(Wir wollen die Varation der Konstante explizit sehen)

Lösung: $y = Ce^{-2x} + e^{-x}, C \in \mathbb{R}.$

HS14 - Aufgabe 7:

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' - 4y = 2xe^{5x}$.

Wir wollen die Variation der Konstanten explizit sehen.

Lösung: $y(x) = (2(x-1)e^x + C) \cdot e^{4x} = 2(x-1)e^{5x} + Ce^{4x}$

Rep-HS15 - Aufgabe 7: * (wird gemeinsam nachbesprochen)

Die beiden Funktionen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ seien 2 verschiedene Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = (\arctan(x) + x^3)y.$$

Genau eine der nachfolgenden Funktionen ist dann sicher auch eine Lösung der Differentialgleichung:

a) $y_1 + y_2 - 2y_1y_2$, b) $y_1 + 2$, c) $3y_1 + 4y_2$ oder d) $y_1 - y_2 + 1$. Welche (mit Begründung)?

Lösung: $3y_1 + 4y_2$ (zeigen durch einsetzen in DGL)

HS15 - Aufgabe 5: * (wird gemeinsam nachbesprochen)

a) Modellieren Sie mit Hilfe einer Differentialgleichung exponentielles Wachstum einer Population, wo ein konstanter Zustrom von aussen dazukommt (Immigration). Welches Modell ist das richtige, wo $c, \alpha > 0$:
A) $y' = \alpha y + c$, oder B) $y' = \alpha y + cy$?

b) Modellieren Sie mit Hilfe einer Differentialgleichung exponentielles Wachstum einer Population, wo der Zustrom von aussen dazukommt (Immigration). Der Zustrom von aussen soll proportional zur Wurzel der aktuellen Totalanzahl Individuen sein.

Lösung: 1. A) 2. $y' = \alpha y + \beta\sqrt{y}$

Linearisieren:

Formel: $f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{Linearisieren}}$

Vorzeigeaufgabe: Bestimmen Sie approximativ $e^{1.2}$

HS12 - 1 c) + d)

c) Geben Sie approximativ mit einer Formel aus der Vorlesung $e^{-0.1}$ an. Linearisieren Sie dazu $f(x) = e^x$ um $x_0 = 0$.

d) Geben Sie approximativ mit einer Formel aus der Vorlesung $\ln(0.9)$ an.

Lösung: c) 0.9 d) -0.1

HS13 - Aufgabe 7: Sie haben keinen Taschenrechner dabei (hoffentlich!) und wollen trotzdem $\sin(\pi + 0.1)$ (Bogenmass!) berechnen. Benutzen Sie die linearisierte Funktion.

Lösung: Linearisiert um $x_0 = \pi$: $\sin(x) \approx -(x - \pi) \rightarrow \sin(\pi + 0.1) \approx -0.1$

Klicker-Fragen "Exponentielles Wachstum / Halbwertszeit"

Vorzeigeaufgabe: **ProbePrüfung HS12 - Aufgabe 1 d)**

Machen Sie eine Überschlagsrechnung, wie in der Vorlesung vordemonstriert, zu folgendem Problem: Sie erinnern sich, dass radioaktives Jod eine Halbwertszeit von etwa 8 Tagen hat. Wieviele Tage dauert es etwa, bis von einer gegebenen Menge nur noch 1'000'000stel der ursprünglicher Menge Jod vorhanden ist?

Rep-HS14 - Aufgabe 1 c) In einem Raum hat es von einem radioaktiven Isotop eine acht mal höhere Menge als erlaubt. Die Halbwertszeit des Isotops betrage 3 Tage. Wie lange muss man warten, bis die Menge genau an der oberen Grenze des zulässigen Bereichs angekommen ist?

Lösung: 9 Tage

Rep-HS13 - Aufgabe 1 c) Bei einem Isotop ist nach 30 Jahren nur noch ein Viertel der ursprünglichen Menge vorhanden. Wie gross ist die Zerfallskonstante (das "λ" aus der Vorlesung)? Sie dürfen den unausgerechneten Ausdruck stehen lassen, weil Sie keinen Taschenrechner dabei haben, hoffentlich.

Lösung: $\lambda = \frac{\ln(2)}{15}$

HS16 - Aufgabe 1d) Sie modellieren stetiges Wachstum mit dem Ansatz $f(t) = Ke^{\lambda t}$, wobei die Zeiteinheit Jahre sei. Als Wachstumsrate wird 2 % pro Jahr angegeben. Wie ist dann das λ? (Formel stehen lassen, da Taschenrechner nicht erlaubt).

Lösung: $\lambda = \ln(1.02)$

Max. Def.bereich

Vorzeigeaufgabe: Was ist der maximale Definitionsbereich von $y = \tan(\ln(x+2))$?

Übungsaufgabe):

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}(x-5)^2\sqrt{x}$. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion.

Lösung: $\mathbb{D} = [0, \infty)$ oder in der Form: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Rep-HS15 - Aufgabe 1b):

Geben Sie den maximal möglichen Definitionsbereich von $\sin(\arcsin x) + 2$ und $\arcsin(\sin x)$ an.

Zusatz: Geben Sie den maximal möglichen Definitionsbereich von $e^{\ln(x)}$ und $\ln(e^x)$ an.

Lösung: $x \in [-1, 1]$, $x \in \mathbb{R}$ Zusatz: $(0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}$

Rep-HS12 - Aufgabe 3b)

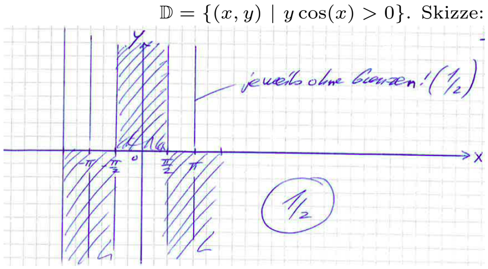
Wie gross ist der maximal mögliche Definitionsbereich von $f(x) = \sqrt{e^{x^3}} + \sin x$ in $\mathbb{R}$?

Lösung: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Rep-HS12 - Aufgabe 5:

Beschreiben und skizzieren Sie den maximal möglichen Definitionsbereich der Funktion $f(x, y) = \ln(y\cos(x))$.

Lösung: $\mathbb{D} = \{(x, y) \mid y\cos(x) > 0\}$. Skizze:



Zusatz:

Ermitteln Sie den natürlichen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertebereich der folgenden Funktionen.

$$f(x) = \sqrt{\ln x}, \quad g(x) = \ln(x-3), \quad h(x) = \sqrt{\ln(x-3)}$$

Lösung:

$D_f = [1, +\infty), W_f = [0, +\infty)$

$D_g = (3, +\infty), W_g = \mathbb{R}$

$D_h = [4, +\infty), W_h = [0, +\infty)$

Kurvenintegral, Tangenten

Vorzeigeaufgabe: **Prüfung HS10 - Aufgabe 2:**

Wir betrachten die durch

$$t \mapsto \vec{x}(t) := \begin{pmatrix} 3\sin(t) \\ 3\cos(t) \\ at \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

definierte Schraubenlinie $\mathcal{C}$, wobei a eine Konstante ist.

a) Wählen Sie a so, dass die Ganghöhe 3 wird, und skizzieren Sie die Situation.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangente an $\mathcal{C}$ im Punkt $\vec{x}(\pi)$ mit der x_1-x_2-Ebene.

c) Berechnen Sie $\int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{x}) d\vec{x}$ für das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}.$$

Prüfung HS09 - Aufgabe 1:

Wir betrachten die durch

$$t \mapsto \vec{x}(t) := \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ at \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

definierte Schraubenlinie $\mathcal{C}$, wobei a eine Konstante ist.

a) Wählen Sie a so, dass die Ganghöhe 4 wird, und skizzieren Sie die Situation.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangente an $\mathcal{C}$ im Punkt $\vec{x}(\frac{\pi}{4})$ mit der x_1-x_2-Ebene.

c) Berechnen Sie $\int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ für das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ -2\pi \end{pmatrix}.$$

Lösung: a) $a = \frac{2}{\pi}$. b) $S = (\sqrt{2}(1 + \frac{\pi}{4}), \sqrt{2}(1 - \frac{\pi}{4}), 0)$ c) 0.

HS16 - Aufgabe 5:

Ein Teilchen geht entlang der Kurve C von $A(0,0,1)$ nach $B(1,1,0)$, wo die Kurve C für $t \in [0,1]$ folgendermassen parametrisiert ist: $\vec{x}(t) = (t, t^2, 1 - t^3)$. Es wirkt das Kraftfeld $\vec{F}(x,y,z) = (x - y, y^2, z - x)$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_C \vec{F} d\vec{x}$.

Lösung: $\frac{3}{4}$

Vektorgeometrie - Next Level

HS16 - Aufgabe 2: Vorzeigeaufgabe

a) Geben Sie alle Punkte P in der xy-Ebene auf der Geraden $x = 0.5$ an, von denen aus die beiden Punkte $A(0,0,0)$ und $B(1,0,0)$ unter einem Winkel von 90 Grad gesehen werden.

b) Geben Sie alle Punkte P in der xy-Ebene an, von denen aus die beiden Punkte $A(0,0,0)$ und $B(1,0,0)$ unter einem Winkel von 90 Grad gesehen werden (geometrische Anschauung reicht nicht - **hilft aber am Schluss bei der Umformung**; mit Rechnung mit Skalarprodukt bitte). Prüfen Sie am Schluss bitte, ob wirklich alle Punkte aus der Rechnung in Frage kommen und beschreiben Sie die Menge der Punkte.

c) Geben Sie alle Punkte P im Raum an, von denen aus die beiden Punkte $A(0,0,0)$ und $B(1,0,0)$ unter einem Winkel von 90 Grad gesehen werden (geometrische Anschauung reicht nicht; mit Rechnung mit Skalarprodukt).

ProbePrüfung HS12 - Aufgabe 2: Geben Sie alle Punkte auf der y-Achse an, von denen man die beiden Punkte A(2; 3; 1) und B(4;-4; 2) unter einem rechten Winkel sieht.

Lösung: $(0,-2,0)$ und $(0,1,0)$

Rep-HS14 - Aufgabe 2: Da Sie ohne Taschenrechner arbeiten, können Sie einzelne Ausdrücke in dieser Aufgabe auch unausgerechnet stehen lassen. Gegeben sei der Punkt $A(1,3,4)$.

a) Welche beiden Punkte B, C auf der x-Achse haben genau Abstand $\sqrt{50}$ von A?

b) Geben Sie einen Normalenvektor zur Ebene durch die Punkte A, B, C an.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken A, B, C.

Lösung: a) $B = (-4,0,0), C = (6,0,0)$ b) $\vec{n} = (0,-40,30)^T$ c) 25

HS14 - 1-Minuten Fragen:

a) Sei g eine Gerade, welche durch die beiden Punkte $A(1,2,3)$ und $B(4,5,6)$ geht.
In welchem Punkt C durchsticht diese Gerade die xy-Ebene?

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $A(0,0,0), B(1,1,1), C(5,0,2)$.

c) Ist das Vektorprodukt kommutativ?
Wenn ja, beweisen Sie es; wenn nein, rechnen Sie ein einfaches Gegenbeispiel dazu.

Lösung: a) $C = (-2,-1,0)$ b) $\frac{\sqrt{38}}{2}$ c) $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

z.B. $\vec{a} = (1 \;\; 0 \;\; 0)$ und $\vec{b} = (0 \;\; 1 \;\; 0) \to (0 \;\; 0 \;\; 1) \neq (0 \;\; 0 \;\; -1)$

Rep-HS17 - Aufgabe 2b:

Von einen Quadrat $ABCD$ kennt man die beiden ersten Punkte vollständig: $A(5,4,-3), B(-2,8,1)$; vom dritten Punkt unvollständig $C(2,?,0)$. Berechnen Sie C und D vollständig. Gibt es nur eine Lösung?

Lösung: b) Ja, $C(2,16,0), D(9,12,-4)$

Funktionen angeben

Vorzeigeaufgabe: **HS12 - 1e):** Geben Sie eine Funktion f mit folgenden Eigenschaften an: Periode 24 (Stunden), eine Nullstelle (mit wachsender Funktion) für $x = 10$ und Amplitude 6.

Lösung: $h(x) = 6 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{24}(x-10)\right)$

HS16 - Aufgabe 1a) Geben Sie alle Nullstellen von $f(x) = (x-4)^5$ an. Geben Sie die Funktion an, wenn Sie den Graphen um 6 Einheiten nach rechts verschieben.

Lösung: $x = 4$, $f_1(x) = (x-10)^5$

HS16 - Aufgabe 1c) Wählen Sie in $f(x) = \sin(ax + b)$ reelle Zahlen a und b so, dass f durch $(1, 0)$ geht und die Periode 2 ist. Wie viele Lösungen mit verschiedenem Graph gibt es?

Lösung: $\sin\left(\frac{2\pi}{2}x\right) = \sin(\pi \cdot x) \to a = \pi, b = 0 \quad \sin(\pi(x-1)) = \sin(\pi \cdot x - \pi) \to a = \pi, b = -\pi$

Rep-HS16 - Aufgabe 1c) Sie starten mit der Funktion $f(x) := (x-3)^2 + 2$.
Geben Sie die Funktion an, wenn Sie diese an die y-Achse spiegeln.

Lösung: $f_1(x) = (-x-3)^2 + 2$

Rep-HS15 - Aufgabe 1c) Geben Sie eine Funktion an, welche achsensymmetrisch bezüglich der Geraden $x = 4$ (dies ist eine Parallele zur y-Achse) ist.

Lösung: $(x-4)^2$

Rep-HS14 - Aufgabe 1g) Geben Sie eine differenzierbare Funktion $f(x)$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ an, welche streng monoton von $-\infty$ bis 2 wächst, es muss zudem gelten, dass $f(2) = 2$ und von $[2, \infty)$ ist die Funktion periodisch mit Periode 2.

Lösung: $f(x) = \begin{cases} 1 + e^{x-2} & \text{wenn } x \leq 2 \\ 2 + \sin(\pi x) \cdot \frac{1}{\pi} & \text{wenn } x > 2 \end{cases}$

HS15 - Aufgabe 1g) Geben Sie zwei verschiedene Funktionen f, g an, welche beide streng monoton wachsend sind und an der Stelle $x = 0$ Tangenten besitzen, welche übereinstimmen.

Lösung: e^x und $1 + \ln(1 + x)$

Exponentielles Wachstum

Vorzeigeaufgabe: **HS14 - Aufgabe 2:**

a) Eine Population verdoppelt sich in dem von uns beobachteten Zeitintervall jedes Jahr.

Modellieren Sie die Entwicklung der Anzahl x in der Zeit mit einem *stetigen* Modell der Form $x(t) = \ldots$.

Zur Zeit 0.7 Jahre gibt es 100 Einheiten der Population. Wann gibt es 200 Einheiten der Population?

b) Wann gibt es 300 Einheiten der Population?

HS13 - Aufgabe 1:

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Halbwertszeit und der Zerfallskonstanten eines Isotops? Es kommt darin ein natürlicher Logarithmus vor. Welche Approximation benutzen Naturwissenschaftler für diese Grösse normalerweise?

c) Eine Naturwissenschaftlerin beschreibt einen Prozess in der Zeit und sagt, dass eine gewisse Grösse sich in konstanten Abständenimmer wieder verdoppelt. Welchen Modellierungsansatz wählen Sie? Für die volle Punktzahl bitte den allgemeinen Fall, inklusive den Fall, bei dem es keine Verdoppelung, sondern jeweils eine Halbierung gibt.

Lösung: a) $T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$ mit $\ln(2) \approx 0.7$ c) $x(t) = Ke^{\lambda t}$, $t \geq 0, K > 0$ und $\lambda > 0 \Rightarrow$ Verdoppelung, $\lambda < 0 \Rightarrow$ Halbierung

HS16 - Aufgabe 7: Ein Team untersucht einen kohlenstoffhaltigen Gegenstand und kommt mit Hilfe der C14-Methode zum Schluss, dass 80% des C14 bereits zerfallen sind. Auf wann wird der Gegenstand datiert (bitte Formel so weit vereinfachen, wie es ohne Taschenrechner geht - die Halbwertszeit ist Ihnen von der Vorlesung her bekannt!)?

Lösung: $t = (-\ln(0.2)) \cdot \frac{5730}{\ln(2)}$

Rep-HS16 - Aufgabe 8: Ein Prozess wächst exponentiell (also in stetiger Zeit). Es gelte $y(0) = 2$ und das Wachstum pro Zeiteinheit sei 2 Prozent. Welchen Wert hat $y(t)$ zur Zeit $t = 9.3$? Da Sie keinen Taschenrechner haben, können Sie nicht von Hand berechenbare Ausdrücke stehen lassen.

Lösung: $y(9.3) = 2 \cdot e^{\ln(1.02) \cdot 9.3} \quad (= 2 \cdot 1.02^{9.3})$

HS15 - Aufgabe 2:

1. Sie modellieren den Abbau einer Substanz im Körper. Der Ansatz soll sein, dass die Menge kontinuierlich derart abnimmt, dass die Abnahme zu jeder Zeit proportional zur noch vorhandenen Menge ist.
   Die Abnahmegeschwindigkeit ist derart, dass die Menge alle 2 Stunden halbiert wird. Schreiben Sie dazu die Gleichung der Abnahme auf. Für die Zeitachse nehmen Sie die Einheit Stunden; zu Beginn sei die Menge gleich 1. Geben Sie die Parameter explizit an.
2. Sie wollen wissen, um wieviel die Menge nach 6 Minuten abgenommen hat. Leider haben Sie keinen Taschenrechner dabei. Machen Sie eine Linearisierung (Kapitel 7; $x_0 = 0$), um die Abnahme zu schätzen.

Lösung: 1. $\lambda = \frac{\ln(2)}{2}$, $y(t) = e^{-\frac{\ln(2)}{2} \cdot t}$

2. $y(0.1) \approx 1 - \frac{\ln(2)}{2} \cdot 0.1 = 0.965 \rightarrow$ Abnahme $= 0.035$ (mit $\ln(2) = 0.7$)