



Lernkärtchen

„Vektorgeometrie“

MAT182 Zwischenkurs1

vom

So. 18. Okt. 2020 (HS20)

Vektor zwischen zwei Punkten:

Man rechnet immer Endpunkt - Anfangspunkt.

Beispiel: $A(1, -3, 3)$, $B(-5, 3, 0)$

$$\text{Vektor } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 - 1 \\ 3 - (-3) \\ 0 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 1

www.mathcourses.ch/mat182

Länge eines Vektors:

Die Länge eines Vektors Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2}$$

Beispiel: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{81} = 9$$

Vektorgeometrie 2

www.mathcourses.ch/mat182

Länge eines Vektors verändern:

Länge von \vec{v} um λ verändern: $\lambda \cdot \vec{v}$

Beispiel:

Vektor \overrightarrow{AB} (mit $|\overrightarrow{AB}| = 9$) soll Länge 1 haben.

\Rightarrow Wir müssen \overrightarrow{AB} mit $1/9$ multiplizieren:

$$\overrightarrow{AB} := \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \text{ hat Länge 1.}$$

Vektorgeometrie 3

www.mathcourses.ch/mat182

Parameterdarstellung einer Geraden:

$g: \vec{r} = \text{Ortsvektor} + t \cdot \text{Richtungsvektor}$

Gerade durch zwei Punkte A und B:

$$g: \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

Beispiel: Gerade g durch $A(1, -3, 3)$ und $B(-5, 3, 0)$

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 4

www.mathcourses.ch/mat182

Parameterdarstellung einer Ebene:

Ebene durch drei Punkte A, B und C :

$$E: \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$$

Beispiel:

Ebene durch $A(1, -3, 3)$, $B(-5, 3, 0)$ und $C(2, 2, 2)$

$$E: \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vektorgeometrie 5

www.mathcourses.ch/mat182

Vektorprodukt & Skalarprodukt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektorprodukt: } \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

(ergibt einen Vektor welcher senkrecht zu \vec{v} und zu \vec{w} steht)

$$\text{Skalarprodukt: } \vec{v} \cdot \vec{w} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

(um Winkel zwischen \vec{v} und \vec{w} zu berechnen)

Vektorgeometrie 6

www.mathcourses.ch/mat182

Winkel φ zwischen zwei Vektoren \vec{v} und \vec{w} :

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} \right)$$

Beispiel: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -6 + 30 + 3 = 27, \quad |\vec{v}_1| = 9, \quad |\vec{v}_2| = \sqrt{27} \rightarrow \cos^{-1} \left(\frac{3}{\sqrt{27}} \right) = 54.74^\circ$$

Rechter Winkel \iff Skalarprodukt = 0:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = -6 - 6 + 12 = 0 \rightarrow \cos^{-1}(0) = 90^\circ, \text{ d.h. rechter Winkel zw. } \vec{v}_1 \text{ und } \vec{v}_3$$

Vektorgeometrie 7

www.mathcourses.ch/mat182

Vektorprodukt braucht man um:

- Die Fläche eines Dreiecks ABC zu berechnen:

$$\text{Fläche } \Delta = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$$

- senkrechten Vektor zu \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} berechnen:

(z.B. Normalenvektor \vec{n})

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

Vektorgeometrie 8

www.mathcourses.ch/mat182

Koordinatengleichung einer Ebene:

$$ax + by + cz + d = 0$$

wobei $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{n}$ = Normalenvektor

1. Normalenvektor $\rightarrow a, b, c$ bestimmen
2. Punkt in Koordinatengleichung einsetzen
3. Gleichung nach d auflösen
 \Rightarrow Koordinatengleichung der Ebene

Vektorgeometrie 9

www.mathcourses.ch/mat182

Koordinatengleichung einer Ebene:

Beispiel: Ebene E durch $A(1, -3, 3)$, $B(-5, 3, 0)$ und $C(2, 2, 2)$

1. Richtungsvektoren $\vec{AB}, \vec{AC} \rightarrow \vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ -36 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 9, b = -9, c = -36$$

2. $A(x = 1, y = -3, z = 3)$ in $9x - 9y - 36z + d = 0$ einsetzen:

$$9 + 27 - 108 + d = 0 \rightarrow d = 72$$

$$\Rightarrow E : 9x - 9y - 36z + 72 = 0 \quad : 9 \rightarrow E : x - y - 4z + 8 = 0$$

Vektorgeometrie 10

www.mathcourses.ch/mat182

Schnittpunkt einer Geraden und Ebene:

1. Gerade zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 6t \\ 2 - 4t \\ 3 + 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. Ebene in Koordinatengleichung $ax + by + cz + d = 0$
3. Für x, y, z die Koordinaten der Geraden einsetzen
4. Gleichung nach t auflösen
5. Lösung in Gerade einsetzen \rightarrow Schnittpunkt

Vektorgeometrie 11

www.mathcourses.ch/mat182

Schnittgerade zweier Ebenen:

1. Koordinatengleichung der Ebenen $\rightarrow \vec{n}_1, \vec{n}_2$
2. Vektorprodukt von $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 := v$ = Richtungsvektor
3. Punkt auf Schnittgeraden ($\hat{=}$ Ortsvektor):
4. 1 Vble frei wählen, z.B. $x = 0$
und in Koordinatengleichungen einsetzen
5. $\rightarrow 2 \times 2$ Gleichungssystem lösen \rightarrow Punkt
6. \Rightarrow Parameterdarstellung der Schnittgeraden

Vektorgeometrie 12

www.mathcourses.ch/mat182

Neigungswinkel zw. einer Geraden und Ebene:

- 1) Richtungsvektor der Gerade bestimmen ($=: \vec{v}$)
- 2) Normalenvektor der Ebene bestimmen ($=: \vec{n}$)
- 3) Neigungswinkel:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}\right) = 90^\circ - \arccos\left(\frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}\right)$$

Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen:

- 1) beide Normalenvektoren (\vec{n}_1 und \vec{n}_2) bestimmen
- 2) Schnittwinkel $= \varphi = \arccos\left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right)$

Vektorgeometrie 13

www.mathcourses.ch/mat182

Abstand zweier Punkte A und B :

$$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$$

$$\text{Abstand} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Abstand von Punkt A zur Ebene E :

$$A = (x_1, y_1, z_1), \quad E : ax + by + cz + d = 0 :$$

$$\text{Abstand} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Vektorgeometrie 14

www.mathcourses.ch/mat182