Stetigkeit, differenzierbar

Vorzeigeaufgabe: Pr08 - Aufgabe 2: Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche definiert ist durch

$$f(x) \begin{cases} Ae^x, & \text{falls } x < 0 \\ B\frac{1}{1+x^2}, & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

Dabei sind $A, B > 0$ Konstanten.

a) Welche Beziehung muss zwischen A und B gelten, damit f stetig wird?

b) Wie müssen A und B gewählt werden, damit f stetig ist und die Bedingung $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ erfüllt?

d) Ist die gemäss Teilaufgabe b) gewählte Funktion f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?

Aus Wirtschaftsprüfung: Betrachten Sie für Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + x, & \text{falls } x \leq 0 \\ \beta e^x, & \text{falls } x > 0, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Parameterpaare $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, für die f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Lösung: $\alpha = \beta = 1 \to (\alpha, \beta) = (1, 1).$

Aus Wirtschaftsprüfung:

Sei m eine reelle Zahl und e die eulersche Zahl, $e \sim 2.718$. Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ex + m & \text{für } x < e \\ x^2 \ln(x) & \text{für } x \geq e. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Zahl m so, dass f stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

Ist die Funktion auch differenzierbar (an der Stelle $x_0 = e$)?

Lösung: $m = 2e^2, \quad$ nein.

HS14 - Aufgabe 3: Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} Ae^x & \text{falls } x < 1 \\ B\frac{1}{x^2} & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$$

wo A, B positive Konstanten sind. Wie muss man A, B wählen, damit f stetig ist und gleichzeitig $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2e$?

Lösung: $A = 1, B = e.$