Vorzeigeaufgabe: Prüfung HS10 - Aufgabe 2:

Wir betrachten die durch

$$t \mapsto \vec{x}(t) := \begin{pmatrix} 3\sin(t) \\ 3\cos(t) \\ at \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

definierte Schraubenlinie $\mathcal{C}$, wobei a eine Konstante ist.

a) Wählen Sie a so, dass die Ganghöhe 3 wird, und skizzieren Sie die Situation.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangente an $\mathcal{C}$ im Punkt $\vec{x}(\pi)$ mit der x_1-x_2-Ebene.

c) Berechnen Sie $\int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{x})d\vec{x}$ für das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Schraubenlinie:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3\sin(t) \\ 3\cos(t) \\ a \cdot t \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{matrix} 3\sin(t) \\ 3\cos(t) \end{matrix}\right\}$ Kreis mit Radius 3

$a \cdot t \Rightarrow$ z-Koordinate ergibt die Ganghöhe

Höhenunterschied nach $\underbrace{\text{1 vollen Kreisumdrehung}}_{\text{Periode von } \sin(t), \cos(t) \;\Rightarrow\; t = 2\pi}$

$\Rightarrow$ Ganghöhe = z-Koo. nach $t = 2\pi$ soll gleich 3 sein:

$$a \cdot 2\pi = 3 \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{3}{2\pi}}}$$

c) $\int_C \vec{F}(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_a^b F(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\, dt$

1) x(t) in F einsetzen:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 3\sin(t) \\ 3\cos(t) \\ \frac{3}{2\pi}\cdot t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}(\vec{x}(t)) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ -3\sin(t) \\ 15\sin(t) + 21\cos(t) \end{pmatrix}$$

2) $\dot{\vec{x}}(t)$ (Ableitung = Geschwindigkeitsvektor)

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ -3\sin(t) \\ \frac{3}{2\pi} \end{pmatrix}$$

3) Skalarprodukt

$$\vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ -3\sin(t) \\ 15\sin(t) + 21\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ -3\sin(t) \\ \frac{3}{2\pi} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{9\cos^2(t) + 9\sin^2(t)}_{9(\underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{=1\ !})} + \frac{45}{2\pi}\sin(t) + \frac{63}{2\pi}\cos(t)$$

4) Integrieren

$$\int_C \vec{F}(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_0^{2\pi} 9 + \frac{45}{2\pi}\sin(t) + \frac{63}{2\pi}\cos(t)\, dt = 9t - \frac{45}{2\pi}\cos(t) + \frac{63}{2\pi}\sin(t) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= \Big(18\pi - \frac{45}{2\pi}\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} + \frac{63}{2\pi}\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0}\Big) - \Big(0 - \frac{45}{2\pi}\underbrace{\cos(0)}_{=1} + \frac{63}{2\pi}\underbrace{\sin(0)}_{=0}\Big)$$

$$= \Big(18\pi - \frac{45}{2\pi} + 0\Big) - \Big(0 - \frac{45}{2\pi} + 0\Big) = 18\pi - \frac{45}{2\pi} + \frac{45}{2\pi} = \underline{\underline{18\pi}}$$

b) Tangente im Punkt $\vec{x}(t_0) = \vec{x}(\pi)$

$t(s) = \vec{x}(t_0) + s \cdot \dot{\vec{x}}(t_0)$

$$\vec{x}(\pi) = \begin{pmatrix} 3\sin(\pi) \\ 3\cos(\pi) \\ \frac{3}{2\pi} \cdot \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3/2 \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{x}}(\pi) = \begin{pmatrix} 3\cos(\pi) \\ -3\sin(\pi) \\ \frac{3}{2\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ \frac{3}{2\pi} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Tangente: $t(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3/2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ \frac{3}{2\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3s \\ -3 \\ 3/2 + \frac{3}{2\pi} \cdot s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Schnittpunkt auf der xy-Ebene: $z = 0$!

$$\Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{3}{2\pi} \cdot s = 0 \quad \Big| -\frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2\pi} \cdot s = -\frac{3}{2} \quad \Big| : \frac{3}{2\pi} \mathrel{\hat{=}} \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$s = -\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{3}} = -\pi$$

in $\vec{t}(s)$ einsetzen $\Rightarrow$ Schnittpunkt: $\begin{pmatrix} 3\pi \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ resp. $\underline{\underline{(3\pi, -3, 0)}}$

HS16 - Aufgabe 2: Vorzeigeaufgabe

a) Geben Sie alle Punkte P in der xy-Ebene auf der Geraden $x = 0.5$ an, von denen aus die beiden Punkte $A(0, 0, 0)$ und $B(1, 0, 0)$ unter einem Winkel von 90 Grad gesehen werden (geometrische Anschauung reicht nicht; mit Rechnung mit Skalarprodukt bitte).

b) Geben Sie alle Punkte P in der xy-Ebene an, von denen aus die beiden Punkte $A(0, 0, 0)$ und $B(1, 0, 0)$ unter einem Winkel von 90 Grad gesehen werden (geometrische Anschauung reicht nicht - **hilft aber am Schluss bei der Umformung**; mit Rechnung mit Skalarprodukt bitte). Prüfen Sie am Schluss bitte, ob wirklich alle Punkte aus der Rechnung in Frage kommen und beschreiben Sie die Menge der Punkte.

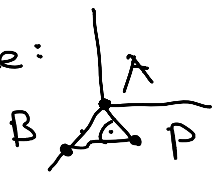
c) Geben Sie alle Punkte P im Raum an, von denen aus die beiden Punkte $A(0, 0, 0)$ und $B(1, 0, 0)$ unter einem Winkel von 90 Grad gesehen werden (geometrische Anschauung reicht nicht; mit Rechnung mit Skalarprodukt).

a) Punkt auf der xy-Ebene $\Rightarrow P(x, y, 0)$

Punkt auf der Geraden $x = 0.5 \Rightarrow P(0.5, y, 0)$

Winkel von $90°$ $\Rightarrow$ Skalarprodukt $= 0$

Skizze:



$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0.5-0 \\ y-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5-1 \\ y-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.5 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$-0.25 + y^2 = 0 \qquad | + 0.25 = \tfrac{1}{4}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{4} \qquad | \pm\sqrt{}$$

$$y = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}} = \pm\tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_1 = (0.5, -0.5, 0) \text{ und } P_2(0.5, 0.5, 0)}}$$

b) $P(x, y, 0)$

$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$x \cdot (x-1) + y^2 = 0$$

$$x^2 - x + y^2 = 0$$

| Idee: Kreis

$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2 \quad M = (u, v)$

$x^2 - 2xu + u^2$

$1x = 2ux \Rightarrow 1 = 2u \Rightarrow u = \frac{1}{2}$

$$x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 0 \quad \Big| + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Kreis mit Mittelpunkt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ und Radius $\frac{1}{2}$

c) Raum $\rightarrow$ $P(x, y, z)$

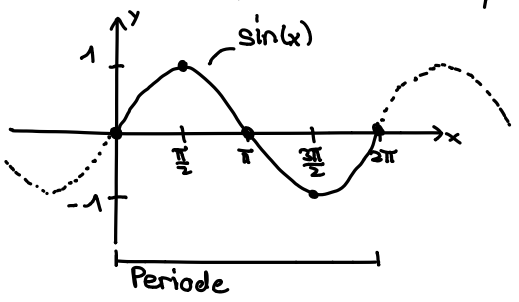
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = x(x-1) + y^2 + z^2 = 0 \quad | \text{ siehe b)}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Kugel mit Mittelpunkt $(1/2, 0, 0)$ und Radius $\frac{1}{2}$

Bekannte Funktionen für

- Periodisch: $\sin(x)$, $\cos(x)$ $\qquad \overset{\mathbb{W}_{f^{-1}}}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{D}_f}} = \mathbb{R}, \overset{\mathbb{D}_{f^{-1}}}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{W}_f}} = [-1,1]$



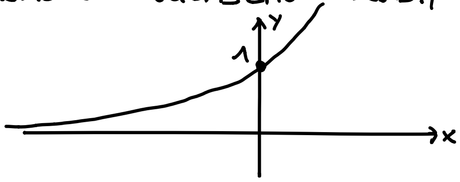
Allg.: $A \cdot \sin(k \cdot x)$

A → Amplitude → $\mathbb{W} = [-A, A]$

k → $\text{Periode} = \frac{2\pi}{k}$

- streng monoton wachsend (z.B.):

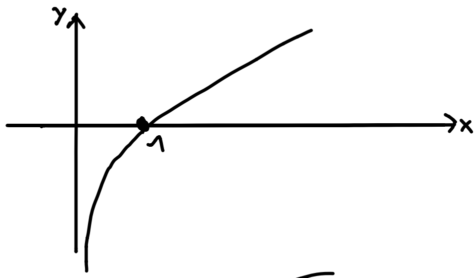
e^x



$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{W}_f = (0, \infty)$

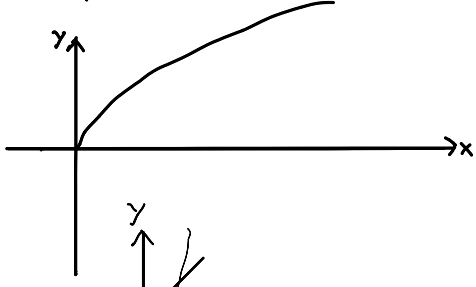
$f(x) = e^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln(x)$

$\ln(x)$



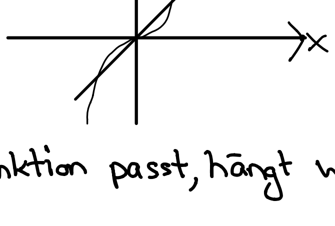
$\overset{\mathbb{W}_{f^{-1}}}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{D}_f}} = (0, \infty)$, $\overset{\mathbb{D}_{f^{-1}}}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{W}_f}} = \mathbb{R}$

$\sqrt{x}$



$\mathbb{D}_f = [0, \infty)$, $\mathbb{W}_f = [0, \infty)$

$x, x^3, \ldots$



- Welche Funktion passt, hängt womöglich vom Definitionsbereich ab

- Achsensymmetrisch, falls gilt: $f(x) = f(-x)$

  gerade Funktionen, z.B. x^2 (bzgl. y-Achse)

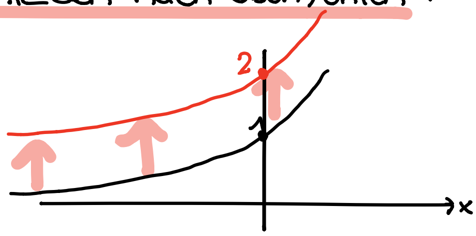
- Punktsymmetrisch, falls gilt: $f(-x) = -f(x)$

  ungerade Funktionen, z.B. x^3 (bzgl. Ursprung)

Funktionen abändern:

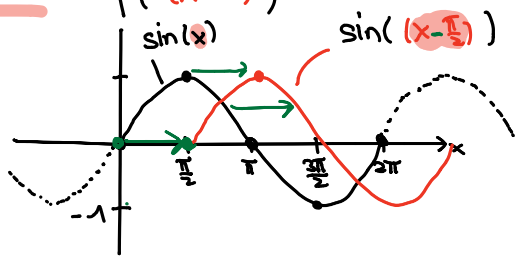
- $f(x)$ verschieben nach oben/unten: $f(x) \pm c$

  Bsp.:



- $f(x)$ verschieben nach rechts/links: $f(\,(x \pm c)\,)$ jedes x durch $(x \pm c)$ ersetzen

  Bsp.: sinus mit Nullstelle bei $\frac{\pi}{2}$:



- $f(x)$ auseinanderziehen / stauchen: $A \cdot f(x)$

HS12 - 1e):

Geben Sie eine Funktion f mit folgenden Eigenschaften an: Periode 24 (Stunden), eine Nullstelle (mit wachsender Funktion) für $x = 10$ und Amplitude 6.

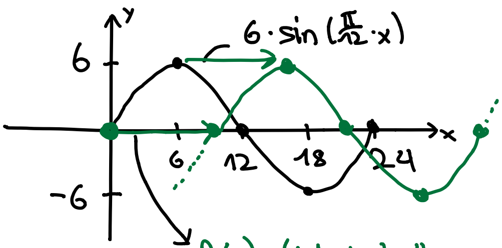
Periode $\Rightarrow f(x) = \sin(x)$ oder $\cos(x)$

- Periode $= 24 = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$

$$\Rightarrow f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot x\right)$$

- Amplitude $= 6 \Rightarrow f(x) = 6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot x\right)$

- Nullstelle bei $x = 10$ (wachsend, d.h. $f'(10) > 0$)



$f(x)$ (Nullstelle, wachsend) um 10 nach rechts verschieben

$$\Rightarrow f(x) = 6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot (x - 10)\right)$$