www.mathcourses.ch/mat182.html

MAT182 Zwischenkurs 1

Algebra & Ableiten

HS23

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat182_basics.html

MAT182 Zwischenkurs 1

Algebra

(Grundlagen)

Formelsammlung MAT182

1 Wichtigste Algebra-Grundlagen

1.1 Potenzgesetze

1. $(ab)^n = a^n \cdot b^n \qquad (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$
3. $a^0 = 1 \qquad 1^n = 1$
4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

1.2 Logarithmusgesetze

Hinweis: Falls nur log(...) steht, meinen Mathematiker oft ln(...)

1. $\log x + \log y = \log(x \cdot y) \qquad \log x - \log y = \log(\frac{x}{y}) \qquad n \cdot \log x = \log(x^n)$
2. $e^{\ln x} = x = \ln e^x$ (falls nichts zwischen e und ln ist!! Sonst zuerst Potenz-/Logarithmengesetze anwenden!)
3. $\ln(e) = 1 \qquad \log_b(1) = 0$
4. $b^{\log_b(x)} = x = \log_b(b^x)$
5. Definition $\qquad y = b^x \Leftrightarrow \log_b(y) = x$
6. $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ (Basiswechselsatz)

Hausaufgaben-Empfehlung vor dem PVK: "Vorarbeit_PVK_Grundlagen-Algebra" (PDF siehe Homepage)

1.3 Gleichungen lösen

1. Quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (Mitternachtsformel)$$

2. Kubische Gleichungen (z.B. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$):

    1. Nullstelle (durch pröbeln) erraten
    2. Polynomdivision anwenden (siehe Link)

`https://youtu.be/K8K4_gowb4E?si=nbw-soxyW4zIEDlv`

	$\frac{1}{x^r} = x^{-r}$	$\sqrt[n]{x^k} = x^{\frac{k}{n}}$	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$\frac{e}{\left(\frac{f}{g}\right)} = \frac{\left(\frac{e}{1}\right)}{\left(\frac{f}{g}\right)} = \frac{e}{1} \cdot \frac{g}{f}$	$\left(x^a\right)^c = x^{a \cdot c}$
1.	$\frac{1}{x^2} =$	$\sqrt{x} =$	$x^7 \cdot x^3 =$	$\frac{8}{\frac{3}{5}} =$	$\left(x^3\right)^2 =$
2.	$\frac{1}{x^5} =$	$\sqrt[3]{x} =$	$x \cdot \sqrt{x} =$	$\frac{4}{\frac{2}{x^2}} =$	$\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^5 =$
3.	$\frac{3}{x^2} =$	$\sqrt[5]{x^4} =$	$\sqrt[4]{x^3} \cdot x^{-2} =$	$\frac{1}{\frac{x}{3}} =$	$\sqrt[7]{x^{\frac{5}{2}}} =$
4.	$\frac{1}{3x^2} =$	$\sqrt{4x} =$	$x^a : x^b = \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$	$\frac{x}{\frac{5}{4}} =$	$\left(\sqrt{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right)^2 =$
5.	$\frac{11}{13x^5} =$	$\sqrt[4]{16x^8} =$	$\frac{x^5}{x^3} =$	$\frac{3x}{\frac{3}{7}} =$	$\left(4x^5\right)^2 =$
6.	$\frac{2}{x^{-3}} =$	Formel rückwärts angewendet $x^{\frac{2}{3}} =$	$\frac{x^{12}}{x^4} =$	$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{2}{9}} =$	$\left(\frac{\frac{x^2}{3}}{\frac{3}{x^{-5}}}\right)^{\sqrt{3}} =$
7.	$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} =$	Formel rückwärts angewendet $4x^{-\frac{5}{2}} =$	$\frac{2x^3}{x^6} =$	$\frac{\frac{13x}{5}}{\frac{2}{3}} =$	

$\ln(\mathbf{a}) + \ln(\mathbf{b}) = \ln(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$	$\ln(\mathbf{a}) - \ln(\mathbf{b}) = \ln\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)$	$\mathbf{c} \cdot \ln(\mathbf{a}) = \ln\left(\mathbf{a}^{\mathbf{c}}\right)$	$\sqrt{\mathbf{a}} \cdot \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$	**Wissen**
$\ln(y) + \ln(y^2) =$	$\ln(y) - \ln(y^2) =$	$3\ln(y) =$	$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3} =$	$x^0 =$
$\ln(y) + \ln(3) =$	$\ln(z) - \ln\left(\frac{1}{5}\right) =$	$-\ln(a) =$	$\sqrt{4x^3} =$	$\ln(1) =$
$\ln\left(\frac{x}{3}\right) + \ln(12xy) =$	$\ln(u) - \ln\left(3\sqrt{u}\right) =$	$-\frac{1}{4}\ln(16x^2) =$	$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x^3} =$	$e^0 =$
$\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2}$	$\mathbf{a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2}$	$\mathbf{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$	$\frac{\sqrt{\mathbf{a}}}{\sqrt{\mathbf{b}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}$	**Fehler-** **quellen**
$(x+3)^2 =$	$(2y-1)^2 =$	$(y^3+11)(y^3-11) =$	$\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^9}} =$	$\sqrt{a+b}$ $=$ $\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}$ $=$
$y^2 + 2y + 1 =$	$x^2 - 10x + 25 =$	$b^2 - 1 =$	$\frac{\sqrt{4x^2}}{\sqrt{3x}} =$	
$y^4 + 4y^2 + 4 =$	$a^2 - a + \frac{1}{4} =$	$9x^4 - 25 =$	$\frac{\sqrt{x^4-16}}{\sqrt{x+2}} =$	

Logarithmen vereinfachen

1. $\ln(4e) + \ln(25e) =$ Lösung: $\ln(100e^2) = \ln(100) + 2$

2. $\ln 25 - \ln 2 + \ln 20 =$ Lösung: $\ln 250$

3. $\log_2(96) - \log_2(3) =$ Lösung: $\log_2(2^5) = 5$

4. $\log_3(54) - \log_3(2) =$ Lösung: 3

5. $\ln(60e) + \ln(2e) - \ln(12e) =$ Lösung: $\ln(10) + 1$

   $= \ln(10e) = \ln(10) + \ln(e)$

6. $\ln(e^3) - \ln(e) =$ Lösung: $2 = \ln(e^2) = 2\ln(e)$

Schreibe den Term ohne negative Exponenten und vereinfache

1. $(-3)^{-4} =$ Lösung: $\frac{1}{81}$

2. $(-2x)^{-3} =$ Lösung: $\frac{-1}{8x^3}$

3. $8(-2x)^{-2} =$ Lösung: $\frac{2}{x^2}$

4. $\dfrac{3y^{-10}}{6} =$ Lösung: $\frac{1}{2y^{10}}$

5. $\dfrac{(2c)^{-6}}{0.5^2} =$ Lösung: $\frac{1}{16c^6}$

6. $\dfrac{3}{x^-5} =$ Lösung: $3x^5$

7. $\dfrac{4(xy)^{-1}}{(2x)^{-1}} =$ Lösung: $\frac{8}{y}$

8. $3x^{-1} \cdot \dfrac{1}{x^{-1}+1} + (1+x)^{-1} =$ Lösung: $\frac{4}{1+x}$

9. $\left(\dfrac{a^{-2}}{b}\right)^{-1} - \dfrac{b}{a^{-2}} =$ Lösung: 0

Potenzgesetze anwenden und vereinfachen

1. $0,3a^{-4} \cdot 0,1a^{-3} =$ Lösung: $0,03a^{-7}$

2. $(n+a)^{2x+3y} \cdot (n+a)^{4x-2y} =$ Lösung: $(n+a)^{6x+y}$

3. $b^{2a} \cdot b^{4a} =$ Lösung: b^{6a}

4. $8a^{6-5y} \cdot 3a^{2+6y} - 5a^{4+y} \cdot 6a^{2+3y} - (24a^{8+y} - 10a^{6+4y}) =$ Lösung: $-20a^{6+4y}$
$= 24a^{8+y} - 30a^{6+4y} - 24a^{8+y} + 10a^{6+4y}$

5. $15a^3b^6(25b^8c - 8a^3b^2 + 9b^6x) =$ Lösung: $375a^3b^{14}c - 120a^6b^8 + 135a^3b^{12}x$

6. $2e^{-1} \cdot e^{3-x} + e(e^2 - 2^{-1}e^{-x+1}) =$ Lösung: $\frac{3}{2}e^{2-x} + e^3$
$= 2e^{2-x} + e^3 - 0,5e^{2-x}$

7. $\frac{4x^2}{3y} \cdot \frac{aby^3}{16nx^3} =$ Lösung: $\frac{aby^2}{12nx}$

8. $\left(\frac{13a^7}{10x^5} : \frac{26a^4}{30x^8}\right) - \left(\frac{24a^3c}{13cx^4} : \frac{8}{26x^7}\right) =$ Lösung: $-\frac{9}{2}a^3x^3 = \frac{3}{2}a^3x^3 - 6a^3x^3$

9. $\frac{3^{n+1} + 3^n}{3^6 + 3^7} =$ Lösung: $3^{n-6} = \frac{3^n \cdot (1+3^1)}{3^6 \cdot (1+3^1)}$

10. $\frac{3n^{2a+3b}}{2n^{a+b}} + \frac{5n^{3b}}{10n^{b-a}} =$ Lösung: $2n^{a+2b} = \frac{3}{2}n^{a+2b} + \frac{1}{2}n^{2b+a}$

11. $\frac{3^a \cdot 4^a - 12^{a+1}}{6^a \cdot 2^{a-1}} =$ Lösung: -22
$= \frac{12^a \cdot (1-12^1)}{12^a \cdot 2^{-1}} = \frac{-11}{0,5}$

12. $\left[\left(\frac{1}{1+a}\right)^4 : \left(\frac{1-a}{1}\right)^{-5}\right] \cdot \left(\frac{1-a}{a+1}\right)^{-4} =$ Lösung: $(1-a)$
$= \frac{1 \cdot (1-a)^5 \cdot (1+a)^4}{(1+a)^4 \cdot 1 \cdot (1-a)^4}$
$= \frac{1 \cdot 1 \cdot (1-a)^{-4}}{(1+a)^4 \cdot (1-a)^{-5} \cdot (1+a)^{-4}}$

13. $\left(\frac{4}{7}a^2\right)^{-3} =$ Lösung: $\frac{343}{64}a^{-6}$
$= \left(\frac{7}{4}\right)^3 a^{-6}$

14. $\left(-\frac{a^2}{x}\right)^{-5} =$ Lösung: $-\frac{x^5}{a^{10}}$

15. $\left(\frac{a^{-3} \cdot b^4}{c^2x^{-2} \cdot b^0}\right)^{-3} =$ Lösung: $\frac{a^9c^6}{b^{12}x^6}$

16. $\left(\frac{2a^4}{3b^5}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2 : \left(\frac{2a}{3b}\right)^3 =$ Lösung: $\frac{a^5}{b^8} = a^5b^{-8}$
$= \frac{8a^{12} \cdot b^4 \cdot 27b^3}{27b^{15} \cdot a^4 \cdot 8a^3}$

Binomische Formeln

1. $4 - a^2 =$ Lösung: $(2-a)(2+a)$

2. $\frac{1}{4}x^2 - 1 =$ Lösung: $(0.5x-1)(0.5x+1)$

3. $9b^3 - b =$ Lösung: $b(3b-1)(3b+1)$

4. $64n^2 - 25m^2 =$ Lösung: $(8n-5m)(8m+5n)$

5. $\frac{9}{4}a^2b^3 - \frac{25}{16}bx^2 =$ Lösung: $b(\frac{3}{2}ab + \frac{5}{4}x)(\frac{3}{2}ab - \frac{5}{4}x)$

6. $n^2 + nx + \frac{1}{4}x^2 =$ Lösung: $(n + \frac{1}{2}x)^2$

7. $2b^2 - 12b + 18 =$ Lösung: $2(b-3)^2$

8. $-120ab^2 + 72ab + 50ab^3 =$ Lösung: $2ab(6-5b)^2$

9. $\frac{a^4}{256} - \frac{b^4}{81} =$ Lösung: $(\frac{a^2}{16} - \frac{b^2}{9})(\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{9})$
$= (\frac{a}{4} - \frac{b}{3})(\frac{a}{4} + \frac{b}{3})(\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{9})$

10. $\left(\frac{3}{2}a^{x-1} - a^{x+3}\right)^2 =$ Lösung: $\frac{9}{4}a^{2x-2} - 3a^{2x+2} + a^{2x+6}$

MathCourses

MAT182 Zwischenkurs 1

Algebra

(Prüfungs-Aufgaben)

Luchsingers 1-Min-Aufgaben

- Luchsingers Belohnung für "fleissige" StudentInnen

  aber alles möglich / unberechenbar

- Einfache Punkte muss man holen!

- Je mehr man übt / anschaut, desto besser

  z.T. ähnliche Fragen (zum selben Thema)

  → z.B. Algebra - Vereinfachungen

- Gewisse Aufgaben kurz im PVK thematisiert

  Grossteil ist aber Eigenarbeit (Vektorgeometrie, DGL, Kurvendiskussion)

  → unterstütze Fleiss aber so gut es geht ☺

Vereinfachen & Umformen: (Algebra 1-Minuten-Aufgaben)

Rep-HS13 (Sept. 2014) - Aufgabe 1b)

Sei $x > 0$. Berechnen Sie

$$\frac{e^{2\ln\sqrt{x}+1}}{x},$$

es ergibt eine reelle Zahl.

Lösung: e

Rep-HS14 (Sept. 2015) - Aufgabe 1b)

Berechnen Sie

$$\frac{\ln(\log_{10}(10^e)e^2)}{3}.$$

Lösung: 1

Rep-HS15 (Sept. 2016) - Aufgabe 1a)

Berechnen Sie

$$e^{\ln(2^{\log_2 3})}$$

Lösung: 3

HS16 - Aufgabe 1b)

Berechnen Sie

$$\log\left(3^{[e^{\ln x^2}-e^{2\ln x}]}\right).$$

Lösung: 0

Rep-HS12 (Sept. 2013) - Aufgabe 1b)

Zwei der folgenden vier Ausdrücke $\ln(a+b)$, $\ln(ab)$, e^{a+b}, e^{ab} kann man sinnvoll umformen.

Welche und wie?

Lösung: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ und $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

HS19 - Aufgabe 1g)

Vereinfachen Sie $\ln\frac{1}{e^3}$ und $\log_{10}\frac{1}{10^3}$ soweit möglich.

Lösung: -3 und -3

Log-Transformationen

Rep-HS14 (Sept. 2015) - Aufgabe 1h)

Der Zusammenhang zwischen den x-Werten und den y-Werten eines Datensatzes wird in einem doppeltlogarithmischen Masstab aufgezeichnet. Es ergibt sich eine Gerade. Wie ist der ursprüngliche Zusammenhang zwischen x und y?

Lösung: $y = x^a \cdot e^b$

HS14 - Aufgabe 1e)

Zweidimensionale Daten wurde je logarithmiert (doppelt-logarithmische Transformation). Mit $u := \ln x$ und $v := \ln y$ wurde dann nach einem bestimmten Verfahren eine Gerade angepasst; es ergab sich $v = 3u + 2$. Wie ist dann der explizite Zusammenhang zwischen x und y (Rücktransformation in der Form $y = \ldots$)?

Lösung: $y = e^2 x^3$

HS15 - Aufgabe 1f)

Bei zweidimensionalen Daten (x, y) wurden die y-Werte logarithmiert (einfach oder halb)-logarithmische Transformation). mit $v := \ln y$ wurde dann nach einem bestimmten Verfahren eine Gerade angepasst; es ergab sich $v = 3x + 2$. Wie ist dann der explizite Zusammenhang zwischen x und y (Rücktransformation in der Form $y = \ldots$)?

Lösung: $y = e^{3x+2}$

HS18 - Aufgabe 1g)

Bei einer Untersuchung stellt man fest, dass die Daten im Doppellogarithmischen Massstab auf der Geraden $y = 3x+5$ liegen. Wie war der ursprüngliche Zusammenhang (bevor man transformiert hat)?

Lösung: $y = x^3 e^5$

MAT182 Zwischenkurs 1

Ableiten

(Grundregeln)

Vorzeigeaufgaben: $f(x) = \frac{3e^x}{5} + x - \sqrt{x} - 3$ $h(x) = \ln(x)\cos(x)$ $h(x) = \frac{10^x}{4x-3}$ $k(x) = e^{(x^3)}$

Grundwissen

1. $f(x) = x^n$ Lösung: nx^{n-1}
2. $f(x) = \frac{1}{x^3}$ Lösung: $-3x^{-4}$
3. $f(x) = \frac{5}{6x^2}$ Lösung: $\frac{-5}{3x^3}$
4. $f(x) = \sin(x)$ Lösung: $\cos(x)$
5. $f(x) = 3\cos(x)$ Lösung: $-3\sin(x)$
6. $f(x) = \frac{e^x}{2}$ Lösung: $\frac{e^x}{2}$
7. $f(x) = \ln(x)$ Lösung: $\frac{1}{x}$
8. $f(x) = \sqrt{x}$ Lösung: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Produktregel

1. $f(x) = xe^x$ Lösung: $e^x + xe^x = e^x(x+1)$
2. $f(x) = (3x^2 + x - 2)e^x$ Lösung: $e^x(3x^2 + 7x - 1)$
3. $f(x) = x^2 \sin(x)$ Lösung: $2x\sin(x) + x^2\cos(x)$
4. $f(x) = (x^2 - 2)\sin(x)$ Lösung: $2x\sin(x) + (x^2 - 2)\cos(x)$
5. $f(x) = x^3\cos(x)$ Lösung: $3x^2\cos(x) - x^3\sin(x)$
6. $f(x) = (x^3 - 2x + 1)\cos(x)$ Lösung: $(3x^2 - 2)\cos(x) - (x^3 - 2x + 1)\sin(x)$

Quotientenregel

1. $f(x) = \frac{x^2+1}{2x+3}$ Lösung: $\frac{2x^2+6x-2}{(2x+3)^2}$
2. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ Lösung: $\frac{-1}{(x-1)^2}$
3. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ Lösung: $\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$
4. $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ Lösung: $\frac{e^x(x-3)}{x^4} = \frac{e^x x^3 - 3x^2 e^x}{x^6}$
5. $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$ Lösung: $\frac{-3x^2-3}{(x^2-1)^2} = \frac{-3(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$
6. $f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2}$ Lösung: $\frac{2(x-1)^2 - 2x(2(x-1))}{(x-1)^4} = \frac{-2(x+1)}{(x-1)^3}$
7. $f(x) = \frac{x^2}{\cos(x)}$ Lösung: $\frac{2x\cos(x) + x^2\sin(x)}{\cos^2(x)}$
8. $f(x) = \frac{x^2+2x}{\ln(x)}$ Lösung: $\frac{(2x+2)\cdot\ln(x) - x - 2}{(\ln(x))^2}$

Kettenregel

1. $f(x) = (x^2+1)^3$ Lösung: $6x(x^2+1)^2$
2. $f(x) = (2x^2+3x-1)^3$ Lösung: $(12x+9)(2x^2+3x-1)^2$
3. $f(x) = \sqrt{3x-1}$ Lösung: $\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$
4. $f(x) = \sqrt{2x^2+x-3}$ Lösung: $\frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x-3}}$
5. $f(x) = \sin(x^2-3x)$ Lösung: $(2x-3)\cos(x^2-3x)$
6. $f(x) = \cos(x^3+1)$ Lösung: $-3x^2\sin(x^3+1)$
7. $f(x) = e^{3x-1}$ Lösung: $3e^{3x-1}$
8. $f(x) = e^{-x^2}$ Lösung: $-2xe^{-x^2}$
9. $f(x) = 10^{-x}$ (Formel für $(a^x)'$ nachschauen!) Lösung: $-\ln(10)\cdot 10^{-x}$
10. $f(x) = \ln(2x-3)$ Lösung: $\frac{2}{2x-3}$

Vermischt 1 (selber erkennen wie ableiten)

1. $\frac{3}{\cos(x)}$ Lösung: $\frac{3\sin(x)}{\cos^2(x)}$
2. $\frac{x^2}{\ln(x)}$ Lösung: $\frac{2x\ln(x)-x}{(\ln(x))^2}$
3. $\cos(\sqrt{x})$ Lösung: $\frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$
4. $\cos^3(x)$ Lösung: $-3\sin(x)\cos^2(x)$
5. e^{2x} Lösung: $2e^{2x}$
6. $\ln(3x)$ Lösung: $\frac{1}{x}$
7. $3x\cos(x)$ Lösung: $3\cos(x)-3x\sin(x)$
8. e^{x^2} Lösung: $2xe^{x^2}$
9. $\sin(3x^2)$ Lösung: $6x\cos(3x^2)$
10. $\frac{x^2}{-x^3+6x-4}$ Lösung: $\frac{x^4+6x^2-8x}{(-x^3+6x-4)^2}$

MAT182 Zwischenkurs 1

Ableiten

(Prüfungslevel)

Vorzeigeaufgabe: $h(x) = \ln(2x)e^{1-4x}$

Kettenregel und Produktregel

1. $f(x) = x\ln(x^2+3)$ Lösung: $\ln(x^2+3) + \frac{2x^2}{x^2+3}$
2. $f(x) = (2x-1)\ln(x+1)$ Lösung: $2\ln(x+1) + \frac{2x-1}{x+1}$
3. $f(x) = x\ln(x) - x$ Lösung: $\ln(x)$
4. $f(x) = (x^2-2)e^{-x}$ Lösung: $(-x^2+2x+2)e^{-x}$
5. $f(x) = xe^{x^2-1}$ Lösung: $(2x^2+1)e^{x^2-1}$
6. $f(x) = (x^2-2)\sqrt{3x-1}$ Lösung: $2x\sqrt{3x-1} + \frac{3(x^2-2)}{2\sqrt{3x-1}}$

Vermischt 2 (selber erkennen wie ableiten)

1. $f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3}$ Lösung: $2(x+a-e^{2x-3})$
2. $f(x) = (1-e^{ax})^2$ Lösung: $-2ae^{ax}(1-e^{ax})$
3. $f(x) = \left(e^{2x}+e^{-x}\right)^2$ Lösung: $2(e^{2x}+e^{-x})(2e^{2x}-e^{-x})$
4. $f(x) = (x+1)e^x$ Lösung: $(x+2)e^x$
5. $f(x) = (3-2x)e^{-\frac{1}{2}x}$ Lösung: $(x-\frac{7}{2})e^{-\frac{x}{2}}$
6. $f(x) = a(x-3)e^{4x-3}$ Lösung: $(4ax-11a)e^{4x-3}$
7. $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$ Lösung: $\frac{-x^2+2x-1}{e^x}$
8. $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ Lösung: $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$
9. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ Lösung: $\frac{-1}{(x-1)^2}$
10. $f(x) = \frac{1}{x}(x^2-4)$ Lösung: $1+\frac{4}{x^2}$

Prüfungs-Level Aufgaben

a) $f(x) = \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) e^{x^2}$

b) $f(x) = e^{\sqrt{1+\sin(x)}}$

c) $f(x) = e^{x^3} \ln(x^2)$

d) $f(x) = \sqrt{e^{x^3}} + \sin(x)$

e) $f(x) = \sin\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right)$

f) $f(x) = e^{(\ln(x))^2+C}$

g) $f(x) = \big(\sin(x^2)\big)^3$

h) $f(x) = \big(\sin(\cos(x^3+1))\big)^2$

i) $f(x) = \ln \dfrac{x}{x^2-3x}$

Lösungen Prüfungsaufgaben:

a) $f'(x) = \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) xe^{x^2} + \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) e^{x^2} 2x = xe^{x^2}\left(\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)$

b) $f'(x) = e^{\sqrt{1+\sin(x)}} \cdot \frac{\cos(x)}{2\sqrt{1+\sin(x)}}$

c) $f'(x) = e^{x^3}\left(3x^2\ln(x^2) + \frac{2}{x}\right)$

d) $f'(x) = \frac{3x^2 e^{x^3}}{2\sqrt{e^{x^3}}} + \cos(x) = \frac{3}{2}x^2\sqrt{e^{x^3}} + \cos(x)$

e) $f'(x) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right)$

f) $f'(x) = e^{(\ln(x))^2+C} \cdot \frac{2\ln(x)}{x}$

g) $f'(x) = 3 \cdot (\sin(x^2))^2 \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$

h) $f'(x) = 2\sin\big(\cos(x^3+1)\big) \cdot \cos\big(\cos(x^3+1)\big) \cdot (-\sin(x^3+1)) \cdot 3x^2$

i) $f'(x) = \frac{x^2-3x-x(2x-3)}{x(x^2-3x)} = \frac{-1}{x-3}$

Zusatz-Übungsaufgaben

1. $f(x) = (\ln(x))^2$ Lösung: $\frac{2\ln(x)}{x}$
2. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{4x} + 1$ Lösung: $2x\sqrt[3]{4x} + x^2(\frac{4}{3}(4x)^{-2/3})$
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ Lösung: $\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^4}}$
4. $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \ln(x+1)$ Lösung: $f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}$
5. $f(x) = 3e^{-x} - 3xe^{-x}$ Lösung: $f'(x) = -6e^{-x} + 3xe^{-x}$
6. $f(x) = (a+bx)e^{-2x}$ Lösung: $f'(x) = (-2a+b-2bx)e^{-2x}$
7. $f(x) = (a\sin(2x) + b\cos(2x))\,e^x$ Lösung: $f'(x) = (2a\cos(2x) - 2b\sin(2x) + a\sin(2x) + b\cos(2x))\,e^x$
8. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2+x)^4}$ Lösung: $\frac{4}{3}(x^2+x)^{\frac{1}{3}}(2x+1)$
9. $f(x) = e^{-(x-3)^2}$. Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$ Lösung: $f'(x) = e^{-(x-3)^2}(6-2x)$,

   $f''(x) = e^{-(x-3)^2}\left((6-2x)^2 - 2\right) = e^{-(x-3)^2}(4x^2 - 24x + 34)$

MAT182 Vorbereitungskurse

Vektorgeometrie

(Lernkarten & Grundlagen)

Vektor zwischen zwei Punkten:

Man rechnet immer Endpunkt - Anfangspunkt.

Beispiel: $A(1,-3,3),\ B(-5,3,0)$

$$\text{Vektor } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5-1 \\ 3-(-3) \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Länge eines Vektors:

Die Länge eines Vektors Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist:

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2}$$

Beispiel: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{81} = 9$$

Länge eines Vektors verändern:

Länge von $\vec{v}$ um λ verändern: $\lambda \cdot \vec{v}$

Beispiel:

Vektor $\overrightarrow{AB}$ (mit $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 9$) soll Länge 1 haben.

$\Rightarrow$ Wir müssen $\overrightarrow{AB}$ mit 1/9 multiplizieren:

$$\overrightarrow{AB} := \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \text{ hat Länge 1.}$$

Paramterdarstellung einer Geraden:

$g:\ \vec{r} =$ Ortsvektor $+\ t\cdot$ Richtungsvektor

Gerade durch zwei Punkte A und B:

$$g:\ \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

Beispiel: Gerade g durch $A(1,-3,3)$ und $B(-5,3,0)$

$$g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung einer Ebene:

Ebene durch drei Punkte A, B und C:

$$E:\ \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$$

Beispiel:

Ebene durch $A(1,-3,3), B(-5,3,0)$ und $C(2,2,2)$

$$E:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt & Skalarprodukt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt: $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$

(ergibt einen Vektor welcher senkrecht zu $\vec{v}$ und zu $\vec{w}$ steht)

Skalarprodukt: $\vec{v} \cdot \vec{w} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

(um Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zu berechnen)

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\left|\vec{v}\right|\ \left|\vec{w}\right|}\right)$$

Beispiel: $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = -6 + 30 + 3 = 27,\ \left|\vec{v_1}\right| = 9,\ \left|\vec{v_2}\right| = \sqrt{27} \rightarrow \cos^{-1}\left(3/\sqrt{27}\right) = 54.74^\circ$

Rechter Winkel $\Longleftrightarrow$ Skalarprodukt $= 0$:

$\vec{v_1} \cdot \vec{v_3} = -6-6+12 = 0 \rightarrow \cos^{-1}(0) = 90^\circ$, d.h. rechter Winkel zw. $\vec{v_1}$ und $\vec{v_3}$

Vektorprodukt braucht man um:

- Die Fläche eines Dreiecks ABC zu berechnen:

$$\text{Fläche } \triangle = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2}$$

- senkrechten Vektor zu $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ berechnen:

  (z.B. Normalenvektor $\vec{n}$)

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

Koordinatengleichung einer Ebene:

$\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z + \boldsymbol{d} = 0$

wobei $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{n} =$ Normalenvektor

1. Normalenvektor $\rightarrow\ a, b, c$ bestimmen
2. Punkt in Koordinatengleichung einsetzen
3. Gleichung nach d auflösen

   $\Rightarrow$ Koordinatengleichung der Ebene

Koordinatengleichung einer Ebene:

Beispiel: Ebene E durch $A(1,-3,3)$, $B(-5,3,0)$ und $C(2,2,2)$

1. Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \longrightarrow \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

   $\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ -36 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow\ a = 9, b = -9, c = -36$

2. $A(x = 1, y = -3, z = 3)$ in $9x - 9y - 36z + d = 0$ einsetzen:
3. $9 + 27 - 108 + d = 0 \quad \rightarrow \quad d = 72$

   $\Rightarrow E:\ 9x - 9y - 36z + 72 = 0 \quad : 9 \rightarrow \quad \underline{E:\ x - y - 4z + 8 = 0}$

Schnittpunkt einer Geraden und Ebene:

1. Gerade zusammenfassen:

   $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6t \\ 2-4t \\ 3+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

2. Ebene in Koordinatengleichung $ax + by + cz + d = 0$
3. Für x, y, z die Koordinaten der Geraden einsetzen
4. Gleichung nach t auflösen
5. Lösung in Gerade einsetzen $\rightarrow$ Schnittpunkt

Schnittgerade zweier Ebenen:

1. Koordinatengleichung der Ebenen $\rightarrow \vec{n_1}, \vec{n_2}$
2. Vektorprodukt von $\vec{n_1} \times \vec{n_2} := v\ \widehat{=}$ Richtungsvektor
3. Punkt auf Schnitttgeraden ($\widehat{=}$ Ortsvektor). Z.B.:
   - 1 Vble frei wählen, z.B. $x = 0$
   - in Koordinatengleichungen einsetzen
   - $\rightarrow 2 \times 2$ Gleichungssystem lösen $\rightarrow$ Punkt
   - $\Rightarrow$ Parameterdarstellung der Schnittgeraden

Neigungswinkel zw. einer Geraden und Ebene:

1) Richtungsvektor der Gerade bestimmen ($=: \vec{v}$)
2) Normalenvektor der Ebene bestimmen ($=: \vec{n}$)
3) Neigungswinkel:

   $\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}\right) = 90° - \arccos\left(\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}\right)$

Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen:

1) beide Normalenvektoren ($\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$) bestimmen
2) Schnittwinkel $= \varphi = \arccos\left(\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}\right)$

Abstand zweier Punkte A und B:

$A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2)$

Abstand $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Abstand von Punkt A zur Ebene E:

$A = (x_1, y_1, z_1), \quad E: ax + by + cz + d = 0:$

Abstand $= \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Vorarbeit - Vektorgeometrie Grundlagen

HS12 - Aufgabe 2:

Wie lautet die Gleichung der Ebene, welche durch die drei Punkte A(0,0,1), B(0,1,0) und C(1,0,0) geht?

Lösung: $x + y + z - 1 = 0$

Rep-HS15 - Aufgabe 1h) :

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ seien definiert als $\vec{e}_1 := (5, 0, 0)$ und $\vec{e}_2 := (0, 2, 3)$. Welchen Vektor erhält man, wenn man das Kreuzprodukt von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ bildet und den resultierenden Vektor noch um den Faktor 3 streckt?

Lösung: $(0,\ -45,\ 30)^T$

HS17 - Aufgabe 2a): Gegeben seien neben Ursprung $O(0, 0, 0)$ auch die Punkte $A(1, 1, 1)$ und $B(0, 2, 0)$. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{OA}$ und $\vec{OB}$.

Lösung: a) $\varphi = \arccos(1/\sqrt{3})$

Rep-HS15 - Aufgabe 2 :

a) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten (0,0,1), (0,1,0), (0,0,3).

b) Geben Sie die Cosinus' der drei Winkel des Dreiecks an (kürzen soweit möglich).

Lösung: a) 1 b) in (0,0,1): $\cos(\alpha) = \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

in (0,1,0): $\cos(\beta) = \frac{4}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ in (0,0,3): $\cos(\gamma) = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Rep-HS13 - Aufgabe 2: Wir legen durch die drei Punkte $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ eine Ebene.

a) Machen Sie dazu eine Skizze und geben Sie einen Normalenvektor der Länge 1 zur Ebene an (Herleitung wegen schöner Zahlen und Skizze nicht nötig).

b) Geben Sie noch einen zweiten, anderen Normalenvektor der Länge 1 zur Ebene an.

c) Wie sieht die Ebenengleichung aus?

d) Welche Winkel hat die Ebene zur xy-Ebene? [Es ist nicht 45!; sie können den trigonometrischen Ausdruck stehen lasssen]

Lösung: a) $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$ b) $\vec{n}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$

c) $x + y + z - 1 = 0$ d) $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

HS15 - 1-Minuten Fragen :

b) Sie haben 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Beschreiben Sie in natürlicher Sprache, in welchen Fällen das Skalarprodukt 0 ist.

c) Folgt aus $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}$ dass auch $\vec{b} = \vec{c}$? Wenn ja, beweisen Sie es, wenn nein, geben Sie ein einfaches Gegeneispiel an.

Lösung: b) wenn $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ Nullvektoren sind; Oder $\vec{a} \perp \vec{b}$ (senkrecht)

c) Nein! (nicht wenn $\vec{a}$ der Nullvektor ist)