HS13-Rep Aufgabe 5

$$y' = \underbrace{(\sin(x))}_{p(x)} \cdot \underbrace{e^{y}}_{s(y)} \underbrace{\quad}_{q(x)=0} \Rightarrow \text{hom. DGL.}$$

$s(y) \neq y \Rightarrow$ Separation der Vblen:

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x) \cdot e^{y} \qquad \Big| \cdot dx \;\; \Big| : e^{y} \hat{=} \cdot e^{-y}$$

$$\int e^{-y}\, dy = \int \sin(x)\, dx$$

$$-e^{-y} = -\cos(x) + C \qquad | \cdot (-1)$$

$$e^{-y} = \cos(x) - C \qquad | \ln(\quad)$$

Bem.: Man könnte auch $-C$ mit "neuer" Konstante $+C_2$ ersetzen

$$-y = \ln(\cos(x) - C) \qquad | \cdot (-1)$$

$$y = y(x) = -\ln(\cos(x) - C)$$

- Def.bereich von $\ln(\;>0)$

$$\Rightarrow \quad \cos(x) - C > 0 \qquad | + C$$

$$\cos(x) > C$$

Da $\cos(x)$ Werte zw. -1 und 1 annimmt, können wir C noch genauer (resp. ohne Abhängigkeit von x) angeben

$$(\cos(x) \geq -1) > C$$

$$\Rightarrow \quad -1 > C$$

(Bem.: Luchsingers Musterlösung arbeitet mit $+C$ und hat daher $C > 1$)

HS13-Rep Aufgabe 6

$$y' = -y + 5x$$

Linear heisst Gerade resp. $y = a \cdot x + b$

$y' = a$

DGL: $y' = -y + 5x$

$a = -(ax+b) + 5x = -ax - b + 5x$

$a = x \cdot (5-a) - b$ | Anz. x sowie (Anzahl) Konstante muss links und rechts übereinstimmen

$x \cdot (0) + a = x \cdot (5-a) - b$

Anz. x: links = rechts

$0 = 5 - a$ | $+a$

$a = 5$

Anz. Konst.: links = rechts

$a = -b$ | $\cdot(-1)$

$b = -a = -5$

$\Rightarrow a = 5$ und $b = -5$ $\Rightarrow$ lineare Lösung: $y = y(x) = 5x - 5$

Für die allg. Lösung löse ich die DGL ganz normal (siehe nächste Seite)

HS13-Rep Aufgabe 6

$$y' = -y + 5x = \underbrace{(-1)}_{p(x)} \cdot \underbrace{y}_{s(y)} + \underbrace{5x}_{q(x)} \Rightarrow \text{inhomogene DGL}$$

- homogene Lösung (von $y' = -y = (-1) \cdot y$):

da $s(y) = y \Rightarrow$ Formel: $y(x) = K \cdot e^{P(x)}$ mit $P(x) = \int p(x)\,dx$

$P(x) = \int -1\,dx = -x$ (ohne Integrationskonstante; wegen K resp. da via Formel)

$$\Rightarrow y = y(x) = K \cdot e^{-x}$$

- Variation der Konstante:

$$y = K(x) e^{-x}$$

$$y' = K'(x) e^{-x} + K(x) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$

DGL: $y' = (-1) \cdot y + 5x$

$$\hat{=} \quad K'(x) e^{-x} + \cancel{K(x) e^{-x} \cdot (-1)} = \cancel{(-1) K(x) e^{-x}} + 5x$$

$$K'(x) e^{-x} = 5x \qquad | : e^{-x} \hat{=} \cdot e^{x}$$

$$K'(x) = 5x e^{x}$$

$K(x) = \int 5x e^{x}\,dx$ | Typische Partielle Integrations-Aufgabe

$= 5x e^{x} - \int 5 e^{x}\,dx$

$= 5x e^{x} - 5e^{x} + C$

$= e^{x}(5x - 5) + C = \left(5e^{x}(x-1) + C\right)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \int u \cdot v' = uv - \int u' v & \\ u = 5x & v = e^{x} \\ u' = 5 & v' = e^{x} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ allg. Lös. der inhomogenen DGL: $y(x) = \left(5e^{x}(x-1) + C\right) \cdot e^{-x}$

$$y(x) = 5e^{x}(x-1)e^{-x} + C \cdot e^{-x} = 5 \cdot \underbrace{e^{x-x}}_{e^{0}=1} \cdot (x-1) + C \cdot e^{-x}$$

$$y(x) = 5(x-1) + C \cdot e^{-x}$$

Bem.: Man hätte auch zuerst DGL allg. lösen können und jetzt gut "schauen" für welches C man eine lineare spezielle Lösung (kein $e^{-x} \to C=0$) kriegt

HS13-Rep Aufgabe 7

prop (bei DGLs) $\Leftrightarrow$ $\cdot$

umgekehrt prop (bei DGLs) $\Leftrightarrow$: $\left(\hat{=} \cdot \frac{1}{\ }\right)$

(Bem. sonst würde eigentlich prop zu $x \overset{\wedge}{=} c \cdot x$ sein)
wenn nicht DGL

Wachstumsgeschw. prop Höhe und umgekehrt prop zu t^2

$$h' = h : t^2 = \frac{h}{t^2} = h \cdot t^{-2}$$

$$h' = \underbrace{h}_{s(h)} \cdot \underbrace{t^{-2}}_{p(t)} \qquad \left(\text{resp. } y' = \underbrace{y}_{s(y)} \cdot \underbrace{x^{-2}}_{p(x)}\right)$$

$q(t) = 0 \Rightarrow$ homogene, da $s(h) = h \Rightarrow$ Formel $h = h(t) = k\, e^{\int p(t)\,dt}$

$$\int p(t)\,dt = \int t^{-2}\,dt = -t^{-1} \qquad (\text{ohne } + C \text{ da Formel})$$

$$\Rightarrow h(t) = k \cdot e^{-t^{-1}} = k \cdot e^{-\frac{1}{t}}$$

Bem.: da nicht explizit steht Sep. der Vblen / Rechenschritte sehen gehe ich davon aus Formel benutzen ist ok

HS14-Rep Aufgabe 5

$$y' = 8xy^2 = \underbrace{8x}_{p(x)} \cdot \underbrace{y^2}_{s(y)} \underbrace{}_{+q(x)=0} \Rightarrow \text{homogene DGL}$$

a) da $s(y) \neq y \Rightarrow$ Formel geht nicht $\Rightarrow$ Separation/Trennen der Variable:

$$\frac{dy}{dx} = 8x \cdot y^2 \quad \Big| : s(y) = y^2, \ \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int 8x \, dx \quad \Big| \int$$

$$\frac{y^{-1}}{(-1)} = 4x^2 + C$$

$$\frac{(-1)}{y} = (4x^2 + C) \quad | \cdot y$$

$$(-1) = (4x^2 + C) \cdot y \quad | : (4x^2 + C)$$

$$\frac{-1}{4x^2 + C} = y = y(x)$$

• Konstante Lösung (für homogene DGLs): $y' = 0$ resp $s(y) = 0$

also $y^2 = 0 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$y = 0$ ist Konst. Lös.

(also auch eine Lösung!)

b) $(x, y) = (0, 1)$ in allg. Lös. einsetzen:

$$1 = y(0) = \frac{-1}{4 \cdot (0)^2 + C} = \frac{-1}{C} \quad | \cdot C$$

$$C = -1$$

$\Rightarrow$ spezielle Lösung $y(x) = \frac{-1}{4x^2 - 1}$ (geht durch $(0,1)$)

HS15-Rep Aufgabe 6

a) $$y' = \frac{y^2}{x^2+1} = \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{p(x)} \cdot \underbrace{y^2}_{S(y)}$$

Trennen der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1} \cdot y^2 \quad \Big| :y^2 \triangleq \cdot \frac{1}{y^2},\ \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \quad | \int$$

$$\frac{y^{-1}}{(-1)} = \arctan(x) + C$$

$$-\frac{1}{y} = \arctan(x) + C \qquad | \cdot y$$

$$(-1) = (\arctan(x) + C) \cdot y \qquad | : (\arctan(x) + C)$$

$$\frac{-1}{\arctan(x) + C} = y = y(x)$$

Bem: konstante Lösung(en) ev besser auch angeben. $y' = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = y(x) = 0$

Bem.: Definitionsbereich angeblich auch erwünscht:

$$\boxed{\begin{aligned} &\bullet \arctan(x) + C \neq 0 \quad |-C \\ &\arctan(x) \neq -C \quad | \tan() \\ &x \neq \tan(-C) \\ &\Rightarrow x \in \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\tan(-C)\} \end{aligned}}$$

b) spez. Lösung mit $y'(1) = \frac{8}{\pi^2}$

↳ da Abl. ⇒ zuerst in DGL einsetzen:

$$y'(1) = \frac{8}{\pi^2} = \frac{1}{(1)^2+1} \cdot y^2 \qquad | \cdot 2$$

$$\frac{16}{\pi^2} = y^2 \qquad | \pm\sqrt{\ }$$

$$y_1(x) = +\sqrt{\frac{16}{\pi^2}} = \frac{4}{\pi} \qquad y_2(x) = -\frac{4}{\pi}$$

stimmt für $x=1$! → $y_1(1) = \frac{4}{\pi}$, $y_2(1) = -\frac{4}{\pi}$

↳ Jetzt in allg. Lösung einsetzen:

$$y(1) = \frac{4}{\pi} = \frac{-1}{\arctan(1) + C} \qquad | \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{4}{\pi} = \frac{-1}{\frac{\pi}{4} + C} \qquad | \cdot \left(\frac{\pi}{4} + C\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{4}+c\right)\cdot\frac{4}{\pi} = (-1)$$

$$1 + c\cdot\frac{4}{\pi} = -1 \qquad \mid -1$$

$$c\cdot\frac{4}{\pi} = -2 \qquad \mid :\frac{4}{\pi} \mathrel{\hat=} \cdot\frac{\pi}{4}$$

$$c = -2\cdot\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ spezielle Lösung $y_1(x) = \dfrac{-1}{\arctan(x) - \frac{\pi}{2}}$

2. Lösung: $y_2(1) = -\frac{4}{\pi} = \dfrac{-1}{\frac{\pi}{4}+c} \qquad \mid \cdot\left(\frac{\pi}{4}+c\right)$

$$-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+c\right) = -1$$

$$-1 + c = -1 \qquad \mid +1$$

$$c = 0$$

$\Rightarrow$ spezielle Lösung $y_2(x) = \dfrac{-1}{\arctan(x)}$

(Bem.: Man könnte hier eventuell noch nachprüfen (ist $y_1'(1) = \frac{8}{\pi^2}$?) um ~~zu checken ob~~ sicherzugehen, dass tatsächlich beide Lösungen stimmen.)