DGL

HS12 - Aufgabe 6:

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' + 2y = e^{-x}$.

Lösung: $y = (e^x + C)\, e^{-2x} = Ce^{-2x} + e^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}$

Rep-HS12 - Aufgabe 6:

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \dfrac{y^3}{x^2+1}$.

Lösung: $y = \pm\sqrt{\frac{1}{-2\arctan(x)+C}}$ und $y = 0$ (konst. Lös.)

HS13 - Aufgabe 2:

a) Die beiden Funktionen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ seien beide Lösungen von

$$y' = (\ln(1+\cos^2(x)) - \sin^2(x^2))y.$$

Welche der folgenden Funktionen (mindestens eine) ist dann auch Lösung dieser Differentialgleichung?

$$a)\ y_1^2 + y_2^2, \quad b)\ y_1 y_2, \quad c)\ 2y_1 - 7y_2, \quad d)\ y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2.$$

Lösung: a) Lösung c) (da lineare Kobmination von Lösungen)

HS13 - Aufgabe 5:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = (2-y)^2 x^2.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung an. Geben Sie die spezielle Lösung an mit $x = 0, y = 0$. Hat es noch singuläre Lösungen?

Lösung: $y = 2 - \frac{1}{\frac{x^3}{3}+C}, \quad C \in \mathbb{R} \quad y = 2 - \frac{1}{\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}}$ singuläre Lsg $y = 2$

HS13 - Aufgabe 6:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = 2xy + x^3.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung an. Wir wollen die einzelnen Rechenschritte explizit sehen - inklusive Variation der Konstanten.

Lösung: $Ce^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2+1)$

Rep-HS13 - Aufgabe 5:

Berechnen Sie die allgemeine Lösung von $y' = (\sin x)e^y$. Schränken Sie die auftretende Konstante so ein, dass die Lösung überall definiert ist.

Lösung: $y = -\ln(\cos(x) + C), \quad C > 1)$

Rep-HS13 - Aufgabe 6:

Betrachten Sie die Differentialgleichung $y' = -y + 5x$. Wir sagen Ihnen, dass diese Differentialgleichung eine spezielle Lösung hat, welche linear ist. Bestimmen Sie diese und geben Sie die allgemeine Lösung an.

Lösung: $y = 5x - 5$ und $y = Ke^{-x} + 5x - 5$

Rep-HS13 - Aufgabe 7:

Wir nehmen an, die Wachstumsgeschwindigkeit für die Höhe h sei proportional zur Höhe und umgekehrt proportional zum Quadrat des Alters t.

Stellen Sie die Differentialgleichung für $h(t)$ auf [1 Punkt] und lösen Sie diese dann [2 Punkte].

Lösung: $h' = \frac{h}{t^2} \quad h(t) = ke^{-\frac{1}{t}}$

HS14 - Aufgabe 6:

Lösen Sie folgende Differentialgleichung:

1. $y' = (a^2 + x^2)(b^2 + y^2)$ wo a, b beliebige reelle Zahlen.
2. Finden Sie die spezielle Lösung, welche durch den Punkt (1,2) geht.

Lösung:

1. Für $b \neq 0: \; y = \tan\left(b \cdot \left(\frac{x^3}{3} + a^2x + C\right)\right) \cdot b$ und für $b = 0: \; y = -1/(x^3/3 + a^2x + C)$.
2. spez. Lös für $b \neq 0: \; y = \tan\left(b \cdot \left(\frac{x^3}{3} + a^2x + \frac{\arctan(2/b) - b/3 - a^2b}{b}\right)\right) \cdot b$ und für $b = 0: \; y = -1/(x^3/3 + a^2x - 5/6 - a^2)$

HS14 - Aufgabe 7:

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' - 4y = 2xe^{5x}$. Wir wollen die Variation der Konstanten explizit sehen.

Lösung: $y(x) = (2(x-1)e^x + C) \cdot e^{4x} = 2(x-1)e^{5x} + Ce^{4x}$

Rep-HS14 - Aufgabe 5:

a) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = 8xy^2$.

b) Geben Sie die spezielle Lösung an, welche durch den Punkt (0,1) geht.

Lösung: a) $y = (-1)/(4x^2 + C)$; $y = 0$ ist auch Lösung. b) $y = (-1)/(4x^2 - 1)$

HS15 - Aufgabe 5:

1. Modellieren Sie mit Hilfe einer Differentialgleichung exponentielles Wachstum einer Population, wo ein konstanter Zustrom von aussen dazukommt (Immigration). Welches Modell ist das richtige, wo $c, \alpha > 0$:
   A) $y' = \alpha y + c$, oder
   B) $y' = \alpha y + cy$?

2. Modellieren Sie mit Hilfe einer Differentialgleichung exponentielles Wachstum einer Population, wo ein konstanter Zustrom von aussen dazukommt (Immigration). Der Zustrom von aussen soll proportional zur Wurzel der aktuellen Totalanzahl Individuen sein.

3. Geben Sie die Lösungen von A) und B) an, sodass die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfüllt sind. Der Lösungsweg ist nicht notwendig.

Lösung: 1. A) 2. $y' = \alpha y + \beta\sqrt{y}$ 3. A: $y = (1 + \frac{c}{\alpha})e^{\alpha x} - \frac{c}{\alpha}$ B: $y = e^{\alpha+c)x}$

HS15 - Aufgabe 6:

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

1. $y^2 y' = x$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

2. $(1 + x^2)y' + xy = 0$.

Lösung: 1. $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + 1}$ 2. $y = \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}$ $\left(= Ke^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}\right)$ $K \in \mathbb{R}$.

HS15 - Aufgabe 7:

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = x^8 y + e^{\frac{x^9}{9}}$. Wir wollen die Variation der Konstante und die Kontrolle explizit sehen.

Lösung: $y = (x + C)e^{1/9x^9}$

Rep-HS15 - Aufgabe 6:

a) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \dfrac{y^2}{x^2+1}$.

b) Geben Sie die spezielle Lösung an, für die gilt $y'(1) = \dfrac{8}{\pi^2}$.

Lösung: a) $y = -\frac{1}{\arctan(x)+C}$ wo $x \in \mathbb{R}\backslash\{\tan(-C)\}$ b) $y_1 = -\frac{1}{\arctan(x)}$ oder $y_2 = -\frac{1}{\arctan(x)-\frac{\pi}{2}}$

Rep-HS15 - Aufgabe 7: Die beiden Funktionen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ seien 2 verschiedene Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = (\arctan(x) + x^3)y.$$

Genau eine der nachfolgenden Funktionen ist dann sicher auch eine Lösung der Differentialgleichung:

a) $y_1 + y_2 - 2y_1y_2$, b) $y_1 + 2$, c) $3y_1 + 4y_2$ oder d) $y_1 - y_2 + 1$. Welche (mit Begründung)?

Lösung: $3y_1 + 4y_2$ (zeigen durch einsetzen in DGL)

HS16 - Aufgabe 6:

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

a) $y' = y^2 \sin(x)$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

b) $y' = y^2 \ln(|x|)$ mit Anfangsbedingung $y(1) = 1$.

Lösung: a) $y = \frac{1}{\cos(x)}$ b) $y = \frac{1}{x - x\ln(x)}$

Rep-HS16 - Aufgabe 3:

Die Funktion $y = \sqrt{x}$ ist Lösung welcher der nachfolgenden DGL, mit Kontrollrechnung bitte?

a) $y' = 2y$ b) $y' = y^2$ c) $y' = \dfrac{2}{y}$ d) $y' = \dfrac{1}{2y}$

Lösung: d) $y' = \dfrac{1}{2y}$

$y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y}$

Rep-HS16 - Aufgabe 6:

a) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = y^{1/2}x^{3/2}$, wo $x, y > 0$. Machen Sie die Kontrollrechnung.

b) Geben Sie die spezielle Lösung an, welche durch den Punkt $(1, 1)$ geht. Vorsicht: beachten Sie, dass $y > 0$ gelten muss. Setzen Sie also die richtige Formel in a) ein ($\sqrt{y} = \ldots$).

Lösung: a) $y = \left(\frac{x^{5/2}}{5} + K\right)^2$, $(K > -\frac{x^5}{5})$ b) $y = \left(\frac{x^{5/2}}{5} + \frac{4}{5}\right)^2$