MathCourses
www.mathcourses.ch/mat141.html

MAT141 PVK

"Lineare Algebra"

Lernkärtchen

(HS23)

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat141.html

Wichtige Zusammenhänge:

Für eine quadratische $[x \times n]$ Matrix A gilt:

$\det(A) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ A ist invertierbar

$\Leftrightarrow$ A ist regulär $\Leftrightarrow r(A) = n$

$\Leftrightarrow$ Zeilen- und Spaltenvektoren von A

sind linear unabhängig

Einige Rechenregeln für Determinanten:

Für quadratische $[x \times n]$ Matrizen A, A^{-1}, B gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \rightarrow \quad \det(A^m) = \Big(\det(A)\Big)^m$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \qquad \det(A^T) = \det(A)$$

A eine $[nxn]$ Matrix $\rightarrow \det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

Determinante einer 2x2 Matrix

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definieren wir

$\det A = a \cdot d - c \cdot b$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 4 = 3 + 4 = 7$$

Determinante einer 3x3 Matrix

Regel von Sarrus:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. - \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Beispiel:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right. = 0 + 2 + 0 - 0 - 0 - (-4) = 6$$

Determinante mit Entwicklungssatz von Laplace:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$$

- Beispiel: Entwicklungssatz von Laplace:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 1 \cdot (2) - 2 \cdot (-2) = 6$

Inverse einer Matrix berechnen:

Inverse einer 2x2 Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse einer nxn Matrix:

$(A \mid I_n)$ umformen zu $(I_n \mid A^{-1})$

Gauss-Umformungen und Determinante:

- Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren:
  $\rightarrow$ Determinante bleibt gleich
  (analog bei Spalten)
- Vertauschen zweier Zeilen:
  $\rightarrow$ Determinante ändert das Vorzeichen!
- Multiplizieren einer Zeile mit λ:
  $\rightarrow$ Determinante wird $\cdot\lambda$ vergrössert!

Beispiel LGS lösen: 1. Erweiterte Matrix

Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrl} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hspace{4cm}}^{A\cdot x}} & \overbrace{\hspace{0.8cm}}^{=b} \\ x_1 & - \; x_2 & & = 1 \\ 2x_1 & - \; 2x_2 & + \; 3x_3 & = 5 \\ & - \; 3x_2 & + \; 9x_3 & = 0 \end{array}$$

$\Longrightarrow$ erweiterte Matrix $(A|b)$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \end{array}\right)$

LGS 1 www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel: 2. Zeilenstufenform + 3. Gl. lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{|c|}\hline Z2 - 2\cdot Z1 \\ \hline Z3 : (-3) \\ \hline \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{|c|}\hline Z2 \leftrightarrow Z3 \\ \hline Z3 + Z2 \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{|c|}\hline Z1 + Z2 \\ \hline Z2 \leftrightarrow Z3 \\ \hline Z3 : (-3) \\ \hline \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)}_{r(A)=3 \text{ "pivots"}} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & 4 \\ x_2 & = & 3 \\ x_3 & = & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow L = \{(4,3,1)\}$ mit $\dim(L) = n - r = 3 - 3 = 0$

LGS 2 www.mathcourses.ch/mat141.html

Dimension der Lösungsmenge eines **LGS**

$\mathbf{dim\ L = n - r}$ = "Anzahl Variablen - Anzahl pivots"

$\widehat{=}$ **Anzahl frei wählbarer Parameter**

LGS $Ax = b$ hat

- hat genau eine Lösung falls $r(A) = n \to \dim(L) = 0$
- hat unendlich viele Lösungen falls $r(A) < n \to \dim(L) > 0$
- hat keine Lösung falls das LGS eine Zeile hat $0 \;\; 0 \;\; 0 \,| \;\; \neq 0$

LGS 3 www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel: Anzahl Lösungen eines LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & u & v \end{array}\right)$$

hat genau eine Lösung, falls $u \neq 0,\ v \in \mathbb{R}$

hat keine Lösung, falls $u = 0$ und $v \neq 0$

hat unendlich viele Lösungen, falls $u = 0$ und $v = 0$

LGS 4 www.mathcourses.ch/mat141.html

Dimension der Lösungsmenge: 3 Fälle

$\dim(\mathbf{L}) = \mathbf{n} - \mathbf{r}(\mathbf{A})$ L = Lösungsmenge eines LGS Ax=b

- **Fall 1: det(A) $\neq$ 0 $\Leftrightarrow$ A ist regulär**

$\det(A) \neq 0 \;\leftrightarrow\; r(A) = n$

$\dim(L) = n - n = 0$

(geometrische Interpretation: $L \,\widehat{=}$ Punkt)

$\Rightarrow$ L **hat genau 1 Lösung**

LGS 5 www.mathcourses.ch/mat141.html

Dimension der Lösungsmenge: 3 Fälle (Forts.)

- **Fall 2:** $\det(A) = 0$ und **LGS unlösbar!**

Das LGS hat eine Zeile: $0\ 0\ 0 \,| \neq 0$

$\Rightarrow$ L **hat keine Lösung**

- **Fall 3: det(A)= 0 und LGS lösbar** $r(A) < n$

$\dim(L) = n - r(A) > 0$

$\dim(L) = 1 \to L \,\widehat{=}$ Gerade $\dim(L) = 2 \to L \,\widehat{=}$ Ebene

$\Rightarrow$ L **hat unendlich viele Lösungen**

LGS 6 www.mathcourses.ch/mat141.html

Cramersche Regel (um LGS zu lösen):

Ist A eine reguläre $[nxn]$ Matrix, so hat das LGS $Ax = b$ eindeutige Lösungen $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ mit

$$\hat{x}_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

A_i : i-te Spalte von A durch b ersetzen

LGS 7 www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel Cramersche Regel:

LGS $(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow \hat{x}_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{3\cdot 1 - 0\cdot 1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \hat{x}_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

LGS 8 www.mathcourses.ch/mat141.html

Basis

Vektorraum mit $\dim(V) = n$.

Eine Basis besteht aus

- genau n linear unabhängigen Vektoren

  d.h. $\det(v^{(1)}\ v^{(2)}\ \dots\ v^{(n)}) \neq 0$

Lineare Unabhängigkeit:

$v_1, \dots, v_k$ sind linear unabhängig, falls

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = 0}_{\text{LGS } A\lambda = 0} \overset{!}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \qquad (\Rightarrow \mathrm{kern}(A) = 0)$$

Linear abh.: falls das LGS unendlich viele Lösungen hat

Lineare Unabhängigkeit überprüfen:

- n Vektoren $\in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \det(v_1\ \dots\ v_n) \neq 0$
- sonst LGS lösen oder von Auge vergleichen (bei 2 Vektoren)

Basis (des $\mathbb{R}^n$):

1) n linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n$ ($\in \mathbb{R}^n$)

orthogonale Basis:

1) n linear unabhängige Vektoren
2) $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise orthogonal (Skalarprodukt $= 0$)

orthonormale Basis (ONB):

1) n linear unabhängige Vektoren
2) $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise orthogonal (Skalarprodukt $= 0$)
3) alle Vektoren haben Länge 1 (= normiert)

Euklidisches Skalarprodukt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i \qquad \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \overline{w_i} \qquad (v, w \in \mathbb{C})$$

- v und w sind orthogonal $\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$
- Länge von $v = ||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ normiert: $\dfrac{v}{||v||}$
- $\cos(\varphi) = \dfrac{\langle v, w \rangle}{||v||\ ||w||}$ (Winkel $0 \leq \varphi \leq \pi$ zwischen v und w)

Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt:

Basis $v_1, \dots, v_n$ gegeben, ist aber nicht orthogonal:

$w_1 = v_1$

$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$

$\vdots$

$w_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle w_i, v_j \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i \qquad$ für $j = 2, \dots n$

Vektoren normieren: $w_i \cdot \frac{1}{||w_i||} \quad \longrightarrow$ ONB

Beispiel aus alten Übungen:

$$\{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

To find an orthonormal basis of this eigenspace, we set

$$w_1 = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

and find $w_2\prime$ such that $w_2\prime = v_1 + \lambda v_2$ and $\langle v_1, w_2\prime \rangle = 0$. This gives us

$0 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 1 + \lambda - (-1) = 2 + \lambda$, so $\lambda = -2$

and $w_2\prime = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. We normalise this vector and get

$$w_2 = 1/\sqrt{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Basiswechsel / Basiswechselmatrix:

Koordinaten eines Vektors sind (bis jetzt immer) gegeben für Standardbasis $[e]$ (=Einheitsvektoren)

im $\mathbb{R}^3$: $[e] = [(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T]$

Neue Basis $[v] = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ gegeben

$\rightarrow$ Koordinaten desselben Vektors für neue Basis $[v]$ berechnen(!)

via **Basiswechselmatrix:** $Id_{[\text{von alter Basis}] \rightarrow [\text{zu neuer Basis}]}$

- $Id_{[v]\rightarrow[e]} = (v_1\ v_2\ \dots\ v_n)$ (Matrix bestehend aus neuen Basisvektoren)

Vektor in neuer Basis $[v]$ darstellen:

Koordinaten von w gegeben (für Standardbasis $[e]$)

w' = Koordinaten von w für neue Basis $[v]$:

1) $Id_{[v]\rightarrow[e]}$ invertieren (für andere Richtung)

$\rightarrow Id_{[e]\rightarrow[v]} = \left(Id_{[v]\rightarrow[e]}\right)^{-1} = (v_1\ v_2\ \dots\ v_n)^{-1}$

Falls $[v]$ eine ONB ist: $\left(Id_{[v]\rightarrow[e]}\right)^{-1} = \left(Id_{[v]\rightarrow[e]}\right)^{T}$

2) Koordinaten w' für neue Basis $[v]$ berechnen

$w' = Id_{[e]\rightarrow[v]} \cdot w$

Abbildungsmatrix (für Standardbasis [e]) aufstellen:

Abbildungsvorschrift $T : (x_1, \ldots, x_n)^T \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$

(ist in der Aufgabenstellung) vorgegeben:

$$\Big(\underbrace{\text{Abbildungsmatrix}}_{T_{[e]\to[e]}}\Big) \cdot \big(\text{urspr. Vektor}\big) = \big(\text{neuer Vektor}\big)$$

$$\Big(\quad \text{ablesen / ergänzen} \quad\Big) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (gegeben) \\ (gegeben) \\ (gegeben) \\ (gegeben) \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix für andere Basen angeben:

Gegeben: Abbildungsmatrix $\left(= T_{[e]\to[e]}\right)$

$$T_{[v]\to[w]} = Id_{[e]\to[w]} \cdot T_{[e]\to[e]} \cdot Id_{[v]\to[e]}$$

wobei $Id_{[v]\to[e]} = \begin{pmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} & \ldots & v^{(n)} \end{pmatrix}$

und $Id_{[e]\to[v]} = \left(Id_{[v]\to[e]}\right)^{-1}$ (invertieren)

falls $[w]$ eine ONB ist gilt: $Id_{[e]\to[w]} = \left(Id_{[w]\to[e]}\right)^T$

(Vorzeige-)Aufgaben dazu auf Homepage!

Abbildungsmatrix für Polynom-Vektorraum $\mathbb{P}_n$:

Standard-Basis für $\mathbb{P}_n$: $\begin{pmatrix} x^n \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^{n-1} \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) Vektor f & Bildvektor $T(f)$ in geg. Basis ausdrücken

2) Abbildungsmatrix via Matrizenmultiplikation aufstellen:

$$T \cdot f = T(f)$$

Beispiel Abbildungsmatrix für $\mathbb{P}_n$:

$f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d \in \mathbb{P}_3$

$T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2, \quad T(f) = 3az^2 + 2bz + c$

1) Koeff. für Standardbasis: $f(z) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad T(f) = \begin{pmatrix} 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix}$

2) Abb.matrix: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix}$

Bild und Kern einer linearen Abbildung:

Lineare Abbildung $f : V \to W$ (mit Abbildungsmatrix A)

$\text{Bild}(f) = \text{range}(f) := \{f(x) \mid x \in V\} \subset W$

$\text{Kern}(f) = \text{kernel}(f) = \text{Null}(f) := \{x \in V \mid f(x) = 0\} \subset V$

Hinweis: beide sind Untervektorräume(!) mit

Dimension vom Bild = r(A) Dimension vom Kern = $n - r$(A)

allg. gilt: dim(Bild) + dim(Kern) = n

Dimension von C_A und Basis von C_A:

Lineare Abbildung $f : V \to W$

mit Abbildungsmatrix A

- $\dim(C_A) = rank(A) = r(A)$
- Basis von C_A:

  $r(A)$ linear unabhängige Spaltenvektoren von A

Fundamentaler Satz der Algebra:

Jedes Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ vom Grad $n \geq 1$

mit komplexen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$

*hat (*bei "Mehrfachzählung") immer n Nullstellen und*

kann gschrieben werden in der Form: $p(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$.

*Bsp.

$p(z) = z^3 - 2z^2 + z = 1 \cdot (z-0) \cdot \underline{(z-1)} \cdot \underline{(z-1)} = z^1 \cdot (z-1)^2$

Bsp. quadratische Gleichung:

$p(z) = z^2 - 2z + 2$

hat Grad $n = 2$ und somit in $\mathbb{C}$ genau 2 Nullstellen*:

Mitternachtsformel: $a = 1,\ b = -2,\ c = 2$:

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$\rightarrow z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$

$\Rightarrow$ komplex konjugierte Lösung $z_2 = \overline{z_1} = \overline{1+i} = 1 - i$

Komplexe Zahlen:

- $i^2 = -1$
- Kartesische Koordinaten: $z = a + ib = \underbrace{a}_{Re(z)} + i \cdot \underbrace{b}_{Im(z)}$
- Komplex konjugiertes: $\overline{z} = a - ib$

Hinweis: komplexe Lösungen sind immer paarweise konjugiert!
(d.h. quadr. Gleichung mit Lös. $x_1 = a + i \cdot b \rightarrow x_2 = a - i \cdot b$)

Polarkoordinaten ($\longleftrightarrow$ kartesischen Koordinaten):

Polarkoordinaten: $z = re^{i \cdot \varphi}$ (kart. Koo.: $z = a + i \cdot b$)

$r = |z| = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (arctan hat 2 Lösungen!! $\rightarrow$ <u>kontrolliere a</u>)

(oder φ graphisch bestimmen)

mit $\underline{a = r \cdot \cos(\varphi)}$ $b = r \cdot \sin(\varphi)$

Gleichung lösen in Polarkoordinaten:

Gleichungen der Form:

$w^n = a + ib$ (kann rechts auch eine reelle Zahl sein $\rightarrow b = 0$)

oder

$w = \sqrt[n]{a + ib} \quad \widehat{=} \quad w^n = a + ib$

hat n Lösungen:

$$w_1, \dots, w_n = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot (k-1)\right)}, \quad k = 1, \dots, n$$

(siehe Beispiel rechts)

Beispiel: Gleichung lösen in Polarkoordinaten

$w^3 = 1 + i \quad \widehat{=} \quad w = \sqrt[3]{1+i}$ hat 3 Lösungen!

Polarkoordinaten von $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \pi/4}$

Formel: $w_1, \dots, w_3 = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{i \cdot \left(\frac{\pi/4}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot (k-1)\right)}, \ k = 1, \dots, 3$

$w_1 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 0\right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12}\right)}$,

$w_2 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 1\right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{9\pi}{12}\right)}$,

$w_3 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 2\right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{17\pi}{12}\right)}$

Bruch vereinfachen zu Komplexer Zahl:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

Beispiel: $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 4 + 2i$

$$= \frac{(3+5i) \cdot (4-2i)}{(4+2i) \cdot (4-2i)} = \frac{(3+5i) \cdot (4-2i)}{4^2 \underbrace{+}_{-i^2} 2^2} = \frac{(3 \cdot 4 \overbrace{+}^{-i^2} 5 \cdot 2) + i \cdot (5 \cdot 4 - 3 \cdot 2)}{20}$$

$$= \frac{22 + i \cdot (14)}{20} = \frac{22}{20} + i \frac{14}{20} = 1.1 + 0.7i$$

Multiplikation / Division mit Polarkoordinaten:

$z_1 = r_1 e^{i \cdot \varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i \cdot \varphi_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = \left(r_1 e^{i \cdot \varphi_1}\right) \cdot \left(r_2 e^{i \cdot \varphi_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$ $\qquad z^n = \left(r \cdot e^{i\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{i \cdot (n \cdot \varphi)}$

Eigenwerte (EW) berechen:

Lösungen von $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$

oder $\det(\lambda \cdot I_n - A) = 0$ (gibt dasselbe)

$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n)$ heisst charakteristisches Polynom

Eigenwerte = Nullstellen des char. Polynoms:

$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)^{a_n} = 0$

a_i ist die **algebraische Multiplizität** vom Eigenwert λ_i

Kubische Gleichung lösen:

- 1 Nullstelle erraten
- Polynomdivision $\Rightarrow$ restl. NS via "Mitternachtsformel"
  https://www.youtube.com/watch?v=K8K4_gowb4E

Beispiel **"verstecke Quadr. Gl.:"**

$ax^6 + bx^3 + c = 0 \;\Rightarrow\; az^2 + bz + c = 0$ mit $z = x^3$

Eigenvektor (EV) v zum EW λ:

Erfüllt: $Av = \lambda v$ $(v \neq 0)$

Eigenraum $E_\lambda(A)$ aller Eigenvektoren berechnen:

$(A - \lambda \cdot I_n)\, v = 0$ lösen (homogenes LGS)

(Basis)Vektoren vom Eigenraum $E_\lambda(A)$ sind EV.

$\dim(E_{\lambda_i})$ = **geometrische Multiplitzität** vom EW λ_i

und $1 \leq$ geom. Multipl. $\leq$ algebr. Multipl.

Eine Matrix A ist diagonalisierbar, falls:

- A symmetrisch ist oder
- für jeden EW gilt:
  algebraische Multiplizität = geometrische Multiplizität

Falls A diagonalisierbar ist, gibt es Matrizen S, D und S^{-1}

mit $A = SDS^{-1}$

Matrix diagonalisieren falls A symmetrisch:

- S = Orthonormalbasis (ONB) aus Eigenvektoren von A
  $= (v_1 \ldots v_n)$
- da S eine Orthogonalmatrix ist gilt: $S^{-1} = S^T$
  $\Rightarrow A = SDS^T$
  mit D = Eigenwerte in der Diagonalen

Spektrum einer linearen Abbildung f_A:

Lineare Abbildung $f_A : V \to W$

(mit Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$)

Spektrum = Menge aller Eigenwerte
inkl. algebr. Multiplizität!
(d.h. Mehrfachauflistung)

$\mathrm{spec}(A) = \{\lambda_1 = \ldots, \lambda_2 = \ldots,\ \ldots\ldots,\ \lambda_n = \ldots\}$

Quadratische Form:

(Falls) $Q(x) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_ix_j \;\Leftrightarrow\; Q_A(x) = \langle Ax, x\rangle$

mit A symmetrisch $(A = A^T)$

Beispiel: $Q(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 8x_2^2$

$\rightarrow Q(x) = \langle Ax, x\rangle$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 8 \end{pmatrix}$

positive-, negativ- und indefinit:

Eine symmetrische Matrix A ist:

- positiv definit, falls alle EW $\lambda_i > 0$ (d.h. $Q(x) > 0\ \forall x$)
- positiv semidefinit falls alle $\lambda_i \geq 0$ (d.h. $Q(x) \geq 0\ \forall x$)
- negativ definit, falls alle EW $\lambda_i < 0$ (d.h. $Q(x) < 0\ \forall x$)
- negativ semidefinit falls alle $\lambda_i \leq 0$ (d.h. $Q(x) \leq 0\ \forall x$)
- indefinit, falls A sowohl pos. wie auch neg. λ_i hat

Alternativ: via (Determinanten der) **Hauptminoren**

Hauptminoren zur Bestimmung der Definitheit

Eine symmetrische Matrix A ist:

positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Hauptminoren $\det(A^{(k)}) > 0$ $1 \leq k \leq n$

negativ definit $\Leftrightarrow$ $\det(A^{(k)}) < 0$ für alle k ungerade

$\det(A^{(k)}) > 0$ für alle k gerade

Bsp. $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad A^{(1)} \quad A^{(2)} \quad A^{(3)} = A$

Orthogonale (= unitäre) Matrix:

Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist **orthogonal** $\iff A^T = A^{-1}$

prüfe: $A^TA = \mathrm{Id}_n = AA^T \quad \Rightarrow \quad \det(A) \in \{-1, 1\}$

A orthogonale Matrix $\Leftrightarrow$ Spaltenvektoren bilden eine ONB

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist **unitär** $\iff \overline{A}^T = A^{-1}$,

d.h. $\overline{A}^TA = \mathrm{Id} = A\overline{A}^T \iff$ Vektoren bilden ONB

Orthogonale (= unitäre) Matrix überpüfen:

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist orthogonal, falls: $A^TA = \mathrm{Id}$ oder

Spaltenvektoren eine orthonormale Basis (ONB) bilden:

- orthogonal: $\langle a^{(i)}, a^{(j)}\rangle = 0 \qquad 1 \leq i \neq j \leq n$
- Länge 1: $\|\, a^{(i)} \,\| = \sqrt{\langle a^{(i)}, a^{(i)}\rangle} = 1 \qquad 1 \leq i \leq n$

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist unitär, falls $\overline{A}^TA = \mathrm{Id}$ oder Vektoren = ONB

Aufpassen im komplexen! $\langle v, w\rangle = v_1 \cdot \overline{w_1} + \ldots + v_n \cdot \overline{w_n}$

$< (1+i), (1+i) >= (1+i)\cdot\overline{(1+i)} = (1+i)\cdot(1-i) = 1 - i^2 = 1+1 = 2$

symmetrisch / hermitisch:

A ist symmetrisch, falls gilt: $A^T = A$

A ist hermitisch, falls gilt: $\overline{A}^T = A$

$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = A, \quad \overline{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \neq A$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \neq B, \quad \overline{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = B$

$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{C}^T = C^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = C$

A symmetrisch, B hermitisch, C symmetrisch und hermitisch

Überprüfen ob eine Funktion linear ist:

Eine Funktion mit Abbildungsmatrix T ist linear, falls gilt:

$T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g) \qquad f(0) = 0!!$

Untervektorraum (subspace) prüfen:

W ist ein Untervektorraum, falls

- $0 \in W$ $\quad$ ($0 \notin W \to$ Gegenbeispiel dass W kein UVR ist)
- $\lambda \cdot a + b \in W \quad \forall a, b \in W, \lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

Inneres Produkt (Skalarprodukt) prüfen:

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist ein Inneres Produkt, falls $\forall u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(IP1) symmetrisch: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

(IP2) bilinear: $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

$\langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$

(IP3) positiv definit: $\langle u, u\rangle > 0, \quad \forall u \neq 0$

und $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Inneres Produkt eines komplexen VR prüfen:

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist ein Inneres Produkt, falls gilt:

$(\mathrm{IP1})_\mathbb{C}$ hermitisch: $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}, \quad \forall v, w \in V$

$(\mathrm{IP2})_\mathbb{C}$ linear im ersten Argument: $\forall v, w, u \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$\langle \alpha v + \beta w, u\rangle = \alpha\langle v, u\rangle + \beta\langle w, u\rangle$

$(\mathrm{IP3})_\mathbb{C}$ positiv definit: $\langle v, v\rangle > 0, \quad \forall v \neq 0$

Aufpassen bei komplexem Skalarprodukt:

zweites Argument / Faktor ist immer komplex konjugiert!

DGL-System $y' = Ay$ lösen:

- EW λ_1, λ_2 und zugehörige EV v_1, v_2 von A berechnen

- allgemeine Lösung: $y(t) = a \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot v_1 + b \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot v_2$

- **Falls Anfangswertproblem:**
  Anfangswerte einsetzen und Gl.sys. nach a, b auflösen

Spezialfall: Falls A eine Nullzeile hat

- A^2, A^3, etc. berechnen bis A^n = Nullmatrix
- Allg. Lösung von $y' = Ay \quad \to \quad \underline{y(t) = e^{At} y_0}$
- benutze $e^{At} =: \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(A \cdot t)^j$

$$\Rightarrow y(t) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(A \cdot t)^j \right) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \left(Id + \frac{A^1 \cdot t^1}{1!} + \ldots + \frac{A^n \cdot t^n}{n!} \right) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Lineare DGL mit Anfangswert lösen:

$\dot{x} = a \cdot x \quad$ mit Anfangswert $\; x(t_0) = c$

hat Lösung: $x(t) = c \cdot e^{a \cdot (t - t_0)}$

- Beispiel: $\quad \dot{x} = 2x \quad$ mit Anfangswert $\; x(1) = (4 + i)$

$\Rightarrow$ Lösung $x(t) = (4 + i) \cdot e^{2(t-1)}$

Falls DGL-System komplexe Eigenwerte hat:

- Nur $\lambda_1 = a + i \cdot b$ benutzen und v_1 zu λ_1 ausrechnen
- betrachte $e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 = e^{at} \cdot e^{i \cdot bt} \cdot v_1$
- Euler's Formel anwenden: $e^{\pm i \cdot bt} = \big(\cos(bt) \pm i \cdot \sin(bt) \big)$
- $\big(\cos(bt) + i \cdot \sin(bt) \; \big) \cdot v_1$ ausmultiplizieren
- sortieren zu 2 Vektoren: (Realteil) $+ \, i \cdot$ (Imaginärteil)

$\Rightarrow$ Lösung: $y(t) = c_1 \cdot e^{at} \cdot \big(\text{Realteil}\big) + c_2 \cdot e^{at} \big(\text{Imaginärteil}\big)$

Beispiel DGL-System mit komplexen Eigenwerten:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \quad \to \quad \lambda_{1,2} = 0 \pm i \cdot 1$

- $\lambda_1 = i = 0 + i \cdot 1 \qquad (a = 0, b = 1)$

- $\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to v_1 = \begin{pmatrix} +1 \\ 1-i \end{pmatrix}$

- $e^{(0+i \cdot 1)t} \cdot v_1 = e^{0 \cdot t} \cdot e^{i \cdot t} \cdot v_1 = \underbrace{e^0}_{=1} \cdot e^{i \cdot t} \cdot v_1 = e^{i \cdot t} \cdot v_1$

Beispiel DGL-System mit komplexen Eigenwerten:

- $e^{i \cdot t} \cdot v_1 = \big(\cos(t) + i \cdot \sin(t) \big) \cdot v_1$

- $\big(\cos(t) + i \cdot \sin(t) \big) \cdot \binom{1}{1-i}$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) + i \cdot \sin(t) \\ \cos(t) + i \cdot \sin(t) - i(\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \end{pmatrix}$$

- sortiert: $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$$

DGL höherer Ordnung via $\mathbf{y' = Ay}$:

Homogene DGL: x” = ax + bx’

Betrachte $y = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$

$$\to y' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = Ay$$

lösen wie bei DGL-Systeme 1

Zusätzlich:

Lineare Abbildung: Spiegeln an der x-Achse

Abbildungsmatrix für eine Spiegelung an der x-Achse:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Spiegeln an der y-Achse

Abbildungsmatrix für eine Spiegelung an der y-Achse:

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Punktspiegelung am Ursprung

Abbildungsmatrix für eine Spiegelung am Ursprung:

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(= Spiegelung an } x\text{- und } y\text{-Achse)}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um Winkel φ

Abbildungsmatrix für eine Rotation um den Winkel φ:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{(im Uhrzeigersinn!)}$$

Beispiel: Drehe um 90° (im Uhrzeigersinn)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um Winkel φ

Abbildungsmatrix für eine Rotation um den Winkel φ:

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{(im Gegen-Uhrzeigersinn!)}$$

Beispiel: Drehe um 90° (im Gegen-Uhrzeigersinn)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen kombinieren

Matrizen in umgekehrter Reihenfolge multiplizieren!

Beispiel: $(0,-1)^T$ zuerst an x-Achse spiegeln, danach noch im Uhrzeigersinn um 90° drehen: $\rightarrow$ Abb.matrix $R \cdot X$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um x-Achse

Abb.matrix für eine Rotation (um φ) um die x-Achse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{(im Uhrzeigersinn!)}$$

Beispiel: Drehe (um 90° im Uhrzeigersinn) um x-Achse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um x-Achse

Abb.matrix für eine Rotation (um φ) um die x-Achse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{(im GUS=Gegen-Uhrzeigersinn!)}$$

Beispiel: Drehe (um 90° im GUS) um x-Achse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um y-Achse

Abb.matrix für eine Rotation (um φ) um die y-Achse:

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \qquad \text{(im Uhrzeigersinn!)}$$

Beispiel: Drehe (um 90° im Uhrzeigersinn) um y-Achse

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um z-Achse

Abb.matrix für eine Rotation (um φ) um die z-Achse:

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(im GUS=Gegen-Uhrzeigersinn!)}$$

Beispiel: Drehe (um 90° im GUS) um z-Achse

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$