MAT141 PVK

Zusatz-Aufgaben

Kurstag 2

Diverse Aufgaben inkl. Musterlösung

www.mathcourses.ch/mat141.html

Inhaltsverzeichnis

MAT141 PVK

Zusatz-Aufgaben

(Kurstag 2)

Eigenwertprobleme

(inkl. Musterlösung)

Zusatz: Eigenwertprobleme

HS16 Probeprüfung Aufgabe 4

Betrachten Sie die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie eine Basis, zu der A Diagonalform hat.

Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

HS16 Probeprüfung Aufgabe 5 Lösung:

Lösung:
Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte:

$$\det \begin{pmatrix} 1-z & i \\ i & 1-z \end{pmatrix} = (1-z)^2 - i^2 = (1-z)^2 + 1.$$

Somit sind die Eigenwerte von der Form $1 \pm \omega$ wobei $\omega^2 = -1$, d. h. $\omega = i$. Also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 1 + i$ und $\lambda_2 = 1 - i$. Berechen wir die Eigenräume:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & i \\ i & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & i \\ i & -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -i & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit sind Eigenvektoren zu λ_1 von der Form $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & i \\ i & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit sind Eigenvektoren zu λ_2 von der Form $\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Somit hat A zu der Basis $[v] = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}]$ Diagonalgestalt.

MAT185 FS16 Probeklausur Aufgabe3:

Aufgabe 3

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Finden Sie eine Matrix P, sodass $P^{-1}AP$ diagonal ist.

(b) Berechnen sie A^n, für $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe von (a).

Lösung:

Lösung:

(a) Aus dem charakteristischen Polynom $\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda = \lambda(1-\lambda)(\lambda-4)$ finden wir die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 4$. Die zugehörige Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir setzen

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

und mittels Gauss-Verfahren finden wir $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Dann ist $A = PDP^{-1}$ und somit $P^{-1}AP = D$, wobei D diagonal ist.

(b) Von oben, $A^n = (PDP^{-1})^n = \underbrace{PD\overbrace{P^{-1}P}^{Id}DP^{-1}\dots PDP^{-1}}_{n-mal} = PD^nP^{-1}$. Wir berechnen $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$, und folglich auch $A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4+2\cdot 4^n & 3\cdot 4^n & -4+4^n \\ -2+2\cdot 4^n & 3\cdot 4^n & 2+4^n \\ -2+2\cdot 4^n & 3\cdot 4^n & 2+4^n \end{pmatrix}$.

MAT185 FS11 Probeklausur Aufgabe5:

Aufgabe 5

Sei A die 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) (*1/2 Punkt*) Ist A symmetrisch?

(b) (*1 Punkt*) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von A.

(c) (*1/2 Punkt*) Berechnen Sie $\det(A^{-1})$.

(d) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und die dazugehörigen Eigenvektoren.

(e) (*1 Punkt*) Finden Sie eine invertierbare 2×2-Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösung:

(a) Nein, denn $2 \neq 1$.

(b) Dies geht nach der Formel:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Es gilt: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = 1$.

(d) Es ist:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 1$$

Also sind die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich sofort als: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(e) Gesucht ist die Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis in die Eigenwertbasis:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

MAT185 FS08 Pruefung Aufgabe5:

5 Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörige Eigenräume von $M = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \in M(2,2,\mathbb{C})$

(4 Punkte)

Lösung:

5 Vgl. letztes Jahr Prüfung Aufg. 7, Repitition Aufg. 7, dieses Jahr Blatt 22 Aufg. 4, Blatt 23 Aufg. 1.

$\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - 49 \Rightarrow \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(M) = \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(M) = \{7, -7\}$

$\left(\begin{array}{cc|c} -12 & -4 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{array}\right); \mathbb{L}_7^1 = \left\{\mu_7 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mu_7 \in \mathbb{C}\right\} = E_7(M)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \end{array}\right); \mathbb{L}_{-7}^1 = \left\{\mu_{-7} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu_{-7} \in \mathbb{C}\right\} = E_{-7}(M)$

MAT185 FS09 Probeklausur Aufgabe4:

4 Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis bestehend aus Eigenvektoren und diagonalisieren Sie die Matrix A.

b) Berechnen Sie $\exp(A)$. ($\exp(a) = \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$).

Lösung:

4

a) Die Matrix A ist offensichtlich symmetrisch, kann also diagonalisiert werden und ihre Eigenräume sind orthogonal. Kurze Rechnung liefert für die Eigenwerte

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda+3)(\lambda-5) = 0 \quad \text{also} \quad \lambda_1 = -3 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 5,$$

und für die entsprechenden Eigenvektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da wir zwei verschiedene Eigenwerte vorfinden, sind v_1 und v_2 automatisch orthogonal. Normalisierung liefert die gewünschte Orthonormalbasis

$$v_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{u_2}{|u_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Analog zu Serie 6 mit dem Cosinus gilt für die Exponential-Funktion einer diagonalisierbaren Matrix

$$\exp(A) = T^{-1} \exp(D) T,$$

wobei T^{-1} gegeben ist durch die Eigenvektoren von A, und D eine Diagonalmatrix aus den Eigenwerten darstellt. Damit gilt

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix A hier symmetrisch ist, ist die Inverse von T gerade deren Transponierte und wir erhalten

$$\begin{aligned} \exp(A) &= T^{-1} \exp(D) T = T^{-1} \exp(D) (T^{-1})^T \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-3) & 0 \\ 0 & \exp(5) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \exp(5) + \exp(-3) & \exp(5) - \exp(-3) \\ \exp(5) - \exp(-3) & \exp(5) + \exp(-3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

HS14 Probeprüfung Aufgabe 2

Sei $B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie einen vollständigen Satz von Eigenwerten und Eigenvektoren für die Matrix B.

b) Hat B drei Orthonormale Eigenvektoren? Falls ja, bestimmen Sie solche Eigenvektoren.

c) Ist B positiv definit? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ b) (Ja da B symm.)

$v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T$, $v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)^T$, $v^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$

c) Ja, da alle EW > 0 sind. (oder da die Determinanten aller Hauptdiagonal-Matrizen pos. sind)

HS14 Probeprüfung Aufgabe 2

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) • EW: $\det\begin{pmatrix} (2-\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & (2-\lambda) & 1 \\ 1 & 1 & (2-\lambda) \end{pmatrix}$

$$= (2-\lambda)\cdot\big((2-\lambda)\cdot(2-\lambda)-1\big) - 1\cdot\big((2-\lambda)-1\big) + 1\big(1-(2-\lambda)\big)$$

$$= (2-\lambda)\cdot(4-4\lambda+\lambda^2-1) - (1-\lambda) + (-1+\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3) - 1+\lambda-1+\lambda$$

$$= (2\lambda^2-8\lambda+6-\lambda^3+4\lambda^2-3\lambda)+2\lambda-2$$

$$= -\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4 = 0 \quad |\text{Pröbeln} \quad \frac{4}{1}\ \frac{-4}{-1}\ \frac{2}{-2}$$

$\lambda_1 = 1$ ist Nullstelle

$\Rightarrow$ Polynomdivision: $(-\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4):(\lambda-1) = (-\lambda^2+5\lambda-4)$

$$-(-\lambda^3+\lambda^2)$$
$$5\lambda^2-9\lambda+4$$
$$-(5\lambda^2-5\lambda)$$
$$-4\lambda+4$$
$$-(-4\lambda+4)$$
$$0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(-\lambda^2+5\lambda-4) = 0$$

$a=-1 \quad b=5 \quad c=-4 \rightarrow \lambda_{2,3} = \dfrac{-5\pm\sqrt{25-16}}{-2} = \dfrac{-5\pm 3}{-2}$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 4$

$\Rightarrow -(\lambda-1)^2\cdot(\lambda-4)^1$

$\lambda_{1,2} = 1$ hat alg. Mult. $=2$

$\lambda_3 = 4$ hat alg. Mult. $=1$

HS14 Probeprüfung Aufgabe 2 (Fortsetzung)

(noch zu a))

• EV: $\underline{\text{zu } \lambda_3 = 4}$: $(A - \lambda_3 I_3) v^{(3)} = 0$

$$\begin{array}{c} +2z_2 \\ -z_2 \\ \end{array}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} v^{(3)} = 0$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ +z_1 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} v^{(3)} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to x_2 = x_3$$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = x_1 - x_3 = 0$

$\hookrightarrow x_1 = x_3$

$\Rightarrow v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wähle $x_3 = 1$

$\underline{\text{zu } \lambda_{1,2} = 1}$: $\begin{array}{c} \\ -z_1 \\ -z_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$\hookrightarrow x_1 = -x_2 - x_3$

2 Variablen wählbar $\Rightarrow$ 2 EV

$v^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wähle $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

HS14 Probeprüfung Aufgabe 2 (Fortsetzung 2)

b) Ja, da B symmetrisch ($B = B^T$)

$v^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \|v^{(1)}\| = \sqrt{2} \Rightarrow v^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

$v^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \|v^{(2)}\| = \sqrt{2} \Rightarrow v^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \|v^{(3)}\| = \sqrt{3} \Rightarrow v^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Länge = 1

Orthogonal?! → Test:

$v^{(1)} \cdot v^{(2)} = \frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2} \neq 0$

$\Rightarrow$ nicht orthogonal

2 EV orthogonalisieren: Setze $\tilde{v}^{(2)} = v^{(2)} - \frac{\langle v^{(2)}, v^{(1)} \rangle}{\|v^{(1)}\|} \cdot v^{(1)}$

$\langle v^{(2)}, v^{(1)} \rangle = v^{(2)} \cdot v^{(1)} = \frac{1}{2}$

$\|v^{(1)}\| = 1$

$\Rightarrow \tilde{v}^{(2)} = v^{(2)} - \frac{\frac{1}{2}}{1} v^{(1)} = v^{(2)} - \frac{1}{2} v^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\tilde{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Test: $v^{(1)} \cdot \tilde{v}^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + 0 = 0$ ✓

$v^{(1)} \cdot v^{(3)} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 = 0$ ✓

$\tilde{v}^{(2)} \cdot v^{(3)} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$ ✓

Aber $\|\tilde{v}^{(2)}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \tilde{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = v^{(2)}$

(ist EV, da $A \cdot \Big(v^{(2)} - \underbrace{\frac{\langle v^{(2)}, v^{(1)} \rangle}{\|v^{(1)}\|}}_{=c} \cdot v^{(1)}\Big) = \underbrace{A v^{(2)}}_{\lambda_1 \cdot v^{(2)}} - c \cdot A v^{(1)} = \lambda_1 \cdot v^{(2)} - c \cdot \lambda_1 \cdot v^{(1)} = \lambda_1 \cdot (v^{(2)} - c \cdot v^{(1)})$)

HS14 Probeprüfung Aufgabe 2 (Fortsetzung 3)

b) ... $\Rightarrow$ ON-Basis aus EV:

$$[V] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}] = \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right]$$

c) Ja, da alle EW positiv sind.

Oder alternativ (über Det.-Krit.)

$B^{(1)} = 2$ hat $\det(B^{(1)}) = 2 > 0$

$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ hat $\det(B^{(2)}) = 3 > 0$

$B^{(3)} = B$ hat $\det(B) = 2(3) - 1\cdot(1) + 1(-1) = 4 > 0$

$\Rightarrow$ alle Hauptdiagonal-Determinanten $> 0 \Rightarrow B$ ist positiv-definit
Matrizen

HS15 Uebungen Serie 11 Aufgabe 2
Finde für jede der folgenden symmetrischen Matrizen eine orthogonale Matrix, welche diese diagonalisiert.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösung HS15 Uebungen Serie 11 Aufgabe 2

///// (a) To compute the eigenvalues we determine the characteristic polynomial

$$\chi_A(z) = (2-z)^2 - 1 = z^2 - 4z + 3,$$

hence the roots are

$$z_\pm = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1.$$

Thus $\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = 3$ are the eigenvalues of A. To compute the eigenvectors of λ_1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

hence $v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ is an eigenvector of norm 1. To compute the eigenvectors of λ_2, one uses Gaussian elimination

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hence $v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ is an eigenvector of norm 1. Let

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Then S is an orthogonal 2×2 matrix and

$$S^\top A S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) To compute the eigenvalues we determine the characteristic polynomial

$$\begin{aligned} \chi_B(z) &= (2-z)(3-z)^2 - 2 - 2 - ((3-z) + 4(2-z) + (3-z)) \\ &= (2-z)(3-z)^2 - ((3-z) + 4(3-z) + (3-z)) \\ &= (3-z)((2-z)(3-z) - 6)) = (3-z)(z^2 - 5z) = z(3-z)(z-5). \end{aligned}$$

So the eigenvalues are $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, and $\lambda_3 = 5$. To compute the eigenvectors of λ_1, one applies Gaussian elimination

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

So $v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$ is an eigenvector of norm 1. For λ_2 we find

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

hence $v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)$ is an eigenvector of norm 1. Finally for λ_3

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

hence $v^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$ is an eigenvector of norm 1. Let

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

then

$$S^\top B S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad /////$$

MAT141 PVK

Zusatz-Aufgaben

(Kurstag 2)

Prüfe ob / Zeige dass...

(inkl. Musterlösung)

Zusatz: Quadratische Formen + Eigenschaften von Matrizen

HS15 Serie 11 Aufgabe 1:

(i) Entscheide, welche der folgenden Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch sind und welche nicht.

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) Bestimme für die folgenden quadratischen Formen Q die symmetrischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $Q(x) = \langle x, Ax\rangle \ \forall\ x \in \mathbb{R}^3$.

(a) $Q(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 + xy - 2xz + 3yz$,

(b) $Q(x,y,z) = 8xy + 10xz + x^2 - z^2 + 5y^2 + 7yz$.

HS15 Serie 11 Aufgabe 1 - Lösung:

(i) Entscheide, welche der folgenden Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch sind und welche nicht.

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

///// (a) is symmetric, while (b) and (c) are not. /////

(ii) Bestimme für die folgenden quadratischen Formen Q die symmetrischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $Q(x) = \langle x, Ax\rangle \ \forall\ x \in \mathbb{R}^3$.

(a) $Q(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 + xy - 2xz + 3yz$,

(b) $Q(x,y,z) = 8xy + 10xz + x^2 - z^2 + 5y^2 + 7yz$.

///// For (a) write

$$Q(x,y,z) = (2x + \frac{1}{2}y - z)x + (3y + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z)y + (z - x + \frac{3}{2}y)$$

and hence

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Similarly, for (b) write

$$Q(x,y,z) = (x + 4y + 5z)x + (4x + 5y + \frac{7}{2}z)y + (5x + \frac{7}{2}y - z)z.$$

and hence

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & \frac{7}{2} \\ 5 & \frac{7}{2} & -1 \end{bmatrix}. \quad /////$$

MAT141 HS17 Serie 11 Aufgabe 2:

Entscheide, ob folgende Quadratische Form positiv definit, negativ definit, oder indefinit ist:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 1 \\ -5 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $Q(x,y,z) = \sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}z^2 + 2\sqrt{2}xy - 8\sqrt{3}xz$ (d) $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 - 3z^2 - 5xy + 9xz$

Lösung: (a) indefinit (b) indefinit (c) indefinit (d) indefinit

Lösungen HS17 Serie 11 Aufgabe 2:

1. We have $(1,0,0)A(1,0,0)^t = 1 > 0$ and $(0,1,0)A(0,1,0)^t = -3 < 0$ and hence the matrix A and the associated quadratic form are indefinite.
2. We have $(1,0,0)B(1,0,0)^t = -6$ and $(0,0,1)B(0,0,1)^t = 1$ and hence the matrix B and the associated quadratic form are indefinite.
3. We have $q(1,0,0) = \sqrt{2} > 0$ and $q(0,0,1) = -\sqrt{3} < 0$, and thus the quadratic form is indefinite.
4. We have $q(1,0,0) = 1 > 0$ and $q(0,0,1) = -3 < 0$, and thus the quadratic form is indefinite.

MAT141 HS17 Serie 10 Aufgabe 3:

Für welche Werte des komplexen Parameters $\alpha \in \mathbb{C}$ ist die folgende Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 01/2 & \\ 0 & \alpha & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & \alpha & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4},$$

(a) symmetrisch? (b) hermitisch? (c) unitär? (d) normal ($A\overline{A}^T = \overline{A}^T A$)?

Lösung: (a) $\forall\alpha \in \mathbb{C}$ (b) $\alpha \in \mathbb{R}$ (c) $\alpha \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (d) $\forall\alpha \in \mathbb{C}$

Lösungen HS17 Serie 10 Aufgabe 3:

Solution. For which values of $\alpha \in \mathbb{C}$ is the matrix A

1. symmetric? A symmetric matrix defined as a square matrix that is equal to its transpose: $A = A^T$. Since the complex parameter α only occupies diagonal elements, A is a symmetric matrix $\forall\alpha \in \mathbb{C}$.

2. hermitian? A hermitian matrix is a complex square matrix that is equal to its own conjugate transpose: $A = A^*$. In our case, we need to verify if:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & \alpha & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & \alpha & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & \bar{\alpha} & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & \bar{\alpha} & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

   The equality between A and its conjugate transpose is only given if, and only if $\alpha = \bar{\alpha}$, where $\bar{\alpha}$ is the conjugate transpose of α. This equality is only given when α is real.

3. unitary? A unitary matrix A is a complex square matrix whose conjugate transpose is also its inverse: $A^* = A^{-1}$, so that $AA^* = A^*A = \mathbb{I}$. In our case we need to verify if:

$$\begin{pmatrix} |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\bar{\alpha} \\ 0 & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\bar{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\bar{\alpha} & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\bar{\alpha} & 0 & 0 & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \mathbb{I}$$

   The equality is only given if two conditions are met. First, the non-diagonal elements must vanish: $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\bar{\alpha}$. This is only given for values of α without a real part: $\alpha \in \mathbb{C} \notin \mathbb{R}$, so that $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\bar{\alpha} = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha = 0$. Second, the diagonal elements must equal unity:

$$|\alpha|^2 + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow |\alpha|^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

4. normal? A normal matrix A is a complex square matrix which commutes with its conjugate transpose A^*: $AA^* = A^*A$. In our case we need to verify if

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & \alpha & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & \alpha & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & \bar{\alpha} & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & \bar{\alpha} & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\bar{\alpha} \\ 0 & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\bar{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\bar{\alpha} & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\bar{\alpha} & 0 & 0 & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\bar{\alpha} \\ 0 & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\bar{\alpha} + \frac{1}{2}\alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\bar{\alpha} + \frac{1}{2}\alpha & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2}\bar{\alpha} + \frac{1}{2}\alpha & 0 & 0 & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \blacksquare$$

   The equality is trivial, as the non-diagonal matrix elements are sums of the same terms. Thus, the matrix A is normal $\forall\alpha \in \mathbb{C}$.

MAT141 HS18 Serie 10 Aufgabe 2:

Exercise 2 (Hermitian and Unitary Matrices)
Which of the matrices below are unitary? Which ones are hermitian? Write down the inverses of the ones which are unitary.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} \frac{2i}{3} & \frac{2i}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{i}{3\sqrt{2}} & -\frac{i}{3\sqrt{2}} & \frac{4i}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Lösungen HS18 Serie 10 Aufgabe 2:

Exercise 2 (Hermitian and Unitary Matrices)
Which of the matrices below are unitary? Which ones are hermitian? Write down the inverses of the ones which are unitary.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} \frac{2i}{3} & \frac{2i}{3} & \frac{i}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{i}{3\sqrt{2}} & -\frac{i}{3\sqrt{2}} & \frac{4i}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Solution: There are several ways to check whether a matrix M is unitary. One of them is to check whether its columns form an orthonormal basis of $\mathbb{C}^n$, with respect to the standard inner product

$$\langle v, w \rangle = v_1 \bar{w}_1 + \ldots + v_n \bar{w}_n.$$

If this is the case then $M^{-1} = \overline{M}^T$.
On the other hand, a matrix is called *Hermitian* if $\overline{M}^T = M$.

- A has only real entries so $\overline{A}^T = A^T$. Also, we have that $A^T = A$. Hence A is Hermitian. But A is not unitary, since its columns do not form a basis (A is not invertible).
- B is not Hermitian: We have
$$\overline{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \neq B^T$$
(B is however symmetric: $B^T = B$).

We claim that B is unitary. Denote b_1, b_2 the columns of b. Again, we check the condition (1):

$$\begin{aligned}
\langle b_1, b_1 \rangle &= \frac{1}{2}(1 + i(-i)) = 1, \\
\langle b_1, b_2 \rangle &= \frac{1}{2}(-i + i) = 0, \\
\langle b_2, b_2 \rangle &= \frac{1}{2}(i(-i) + 1) = 1.
\end{aligned}$$

Hence B is unitary, with inverse

$$B^{-1} = \overline{B}^T = \overline{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

- We claim that C is unitary. Denote c_1, c_2, c_3 the columns of C. Again we check the condition (1):

$$\begin{aligned}
\langle c_1, c_1 \rangle &= \frac{2i}{3}\left(-\frac{2i}{3}\right) + \frac{2i}{3}\left(-\frac{2i}{3}\right) + \frac{i}{3}\left(-\frac{i}{3}\right) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1, \\
\langle c_1, c_2 \rangle &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(2i - 2i) = 0, \\
\langle c_1, c_3 \rangle &= \frac{1}{9\sqrt{2}}(2i \cdot i + 2i \cdot i + i \cdot (-4i)) = \frac{1}{9\sqrt{2}}(-2 - 2 + 4) = 0, \\
\langle c_2, c_2 \rangle &= \frac{1}{2}(1 + 1) = 1, \\
\langle c_2, c_3 \rangle &= \frac{1}{12}(-i + i) = 0, \\
\langle c_3, c_3 \rangle &= \frac{1}{18}(-i \cdot i + -i \cdot i + 4i \cdot (-4i)) = \frac{1}{18}(1 + 1 + 16) = 1.
\end{aligned}$$

Hence C is unitary and its inverse is

$$C^{-1} = \overline{C}^T = \begin{pmatrix} -\frac{2i}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{2i}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{3} & 0 & \frac{-4i}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Notice that $\overline{C}^T \neq C$, hence C is not Hermitian.

- We have

$$\overline{D}^T = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq D.$$

Hence D is not Hermitian. It is also not unitary since its columns do not form an orthonormal basis of $\mathbb{C}^3$: E.g. the first and third vector are not orthogonal to each other.

MAT141 HS19 Serie 10 Aufgabe 3:

Exercise 3. For which values of the complex parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ is the following matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -1/2 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -1/2 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4},$$

symmetric, hermitian, unitary, normal [1]?

Lösungen HS19 Serie 10 Aufgabe 3:

Exercise 3. For which values of the complex parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ is the following matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -1/2 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -1/2 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4},$$

symmetric, hermitian, unitary, normal [1]?

Solution. For which values of $\alpha \in \mathbb{C}$ is the matrix A

1. symmetric? A symmetric matrix is defined as a square matrix that is equal to its transpose: $A = A^T$. Since the complex parameter α only occurs with a positive sign in a symmetric pattern, A is a symmetric matrix $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.

2. hermitian? A hermitian matrix is a complex square matrix that is equal to its own conjugate transpose: $A = A^*$. In our case, we need to verify if:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & -1/2 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -1/2 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\alpha} & -1/2 & 0 \\ \bar{\alpha} & 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & \bar{\alpha} \\ 0 & -1/2 & \bar{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$

The equality between A and its conjugate transpose is only given if, and only if $\alpha = \bar{\alpha}$, where $\bar{\alpha}$ is the conjugate transpose of α. This equality is only given when α is real.

3. unitary? A unitary matrix A is a complex square matrix whose conjugate transpose is also its inverse: $A^* = A^{-1}$, so that $AA^* = A^*A = \mathbb{I}$. In our case we need to verify if:

$$\begin{pmatrix} |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\mathrm{Re}(\alpha) \\ 0 & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & -\mathrm{Re}(\alpha) & 0 \\ 0 & -\mathrm{Re}(\alpha) & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & 0 \\ -\mathrm{Re}(\alpha) & 0 & 0 & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \mathbb{I}$$

The equality is only given if two conditions are met. First, the non-diagonal elements must vanish: $-\mathrm{Re}(\alpha) = 0$. Thus, the real-part of α is zero: $\alpha = ia, a \in \mathbb{R}$. Second, the diagonal elements must equal unity:

[1] A matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ is said to be normal if

$$AA^* = A^*A$$

where A^* denotes the conjugate transpose of A.

$$|\alpha|^2 + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow |\alpha|^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

4. normal? A normal matrix A is a complex square matrix which commutes with its conjugate transpose A^*: $AA^* = A^*A$. In our case we need to verify if

$$\begin{pmatrix} |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\mathrm{Re}(\alpha) \\ 0 & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & -\mathrm{Re}(\alpha) & 0 \\ 0 & -\mathrm{Re}(\alpha) & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & 0 \\ -\mathrm{Re}(\alpha) & 0 & 0 & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\mathrm{Re}(\alpha) \\ 0 & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & -\mathrm{Re}(\alpha) & 0 \\ 0 & -\mathrm{Re}(\alpha) & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} & 0 \\ -\mathrm{Re}(\alpha) & 0 & 0 & |\alpha|^2 + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \blacksquare$$

The equality is trivial, as the non-diagonal matrix elements are sums of the same terms. Thus, the matrix A is normal $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.

MAT141 HS19 Serie 11 Aufgabe 2:

Exercise 2 Decide if the following quadratic forms are positive definite, negative definite or indefinite.

1. The quadratic form corresponding to the matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 15 \\ 8 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. The quadratic form $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ with $q(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$.

Lösungen HS19 Serie 11 Aufgabe 2:

Solution

1. Let $q(x, y, z) = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle$, that is the quadratic form associated to A. Then $q(1, 1, 0) = 16$ and $q(1, -1, 0) = -16$. Therefore q is indefinite.
   (Another way to solve the exercise would be to compute the eigenvalues of A, and find that some are positive and some are negative. The eigenvalues are 0, $\sqrt{289}$ and $-\sqrt{289}$.)
2. We have $q(x, y) = (x - y)^2 \geq 0$ for any $x, y \in \mathbb{R}$, and thus the quadratic form is positive semidefinite. It is not positive definite, because for example $q(1, 1) = 0$.

MAT141 PVK

Zusatz-Aufgaben

Zusatz-Aufgaben

(Kurstag 2)

DGL / ODE...

(inkl. Musterlösung)

Zusatz: Differentialgleichungssysteme

HS16 Probeprüfung Aufgabe 5 Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen:

$$(S)\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = 3y_1(t) - y_2(t) \end{cases} .$$

a) Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

b) Finden Sie die Lösung mit $y_1(\log(2))) = 1, y_2(\log(2))) = 1$.

Lösung: a) $y(t) = a \cdot e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + b \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $y(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{2t} \\ \frac{1}{4}e^{2t} \end{pmatrix}$

HS16 Probeprüfung Aufgabe 5 Lösung:

(a) Die allgemeine Lösung ist von der Form $y(t) = e^{tA}c$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Um e^{tA} zu berechnen, bestimmen wir zuerst die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

$$\det \begin{pmatrix} 1-z & 1 \\ 3 & -1-z \end{pmatrix} = z^2 - 4 = (z-2)(z+2)$$

Die Eigenwerte sind also $2, -2$.

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ 3 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2.

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -2.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

Damit können wir e^{tA} angeben:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{2t} & -\frac{1}{3}e^{-2t} \\ e^{2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{2t} + e^{-2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-2t} & e^{2t} + 3e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist somit von der Form

$$y(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{2t} + e^{-2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-2t} & e^{2t} + 3e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned} e^{-\log(2)A} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{-2\log(2)} + e^{2\log(2)} & e^{-2\log(2)} - e^{2\log(2)} \\ 3e^{-2\log(2)} - 3e^{2\log(2)} & e^{-2\log(2)} + 3e^{2\log(2)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{-2} + 2^2 & 2^{-2} - 2^2 \\ 3 \cdot 2^{-2} - 3 \cdot 2^2 & 2^{-2} + 3 \cdot 2^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 19 & -15 \\ -45 & 49 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$e^{-\log(2)A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$\begin{aligned} e^{(t-\log(2))A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= e^{tA} e^{-\log(2)A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3e^{2t} + e^{-2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-2t} & e^{2t} + 3e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{2t} \\ \frac{1}{4}e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

MAT185 FS11 Probeklausur Aufgabe 7:

Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen:

$$y_1'(t) = 3y_1(t) + y_2(t);$$
$$y_2'(t) = y_1(t) + 3y_2(t).$$

(a) (*2 Punkte*) Finden Sie die allgemeine Lösung.

(b) (*1 Punkt*) Bestimmen Sie die Lösung mit den Anfangswerten $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 0$.

MAT185 FS11 Probeklausur Aufgabe 7 Lösung:

(a) Es handelt sich um ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten Wir diagonalisieren also die Koeffizienten matrix:

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-4)(\lambda-2)$$

Also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 2$. Die Zugehörigen Eigenvektoren sind $\binom{1}{1}$ und $\binom{1}{-1}$. Damit ergibt sich die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems als:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

(b) Die Anfangswerte ergeben sich aus dem Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^0 + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^0 = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix}$$

Aus der zweiten Zeile ergibt sich $c_1 = c_2$ und damit dann aus der ersten $c_1 = \frac{1}{2}$. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y_1(t) = \tfrac{1}{2}(e^{4t} + e^{2t}), \qquad y_2(t) = \tfrac{1}{2}(e^{4t} - e^{2t}),$$

HS17 Übungsserie 13 Aufgabe 3: (Tipp / Hilfe: siehe Lernkärtchen)

Given the following system of linear ODE:

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + 2y_2, \\ y_2' &= -y_1 - 5y_2, \end{aligned}$$

1. Give the general complex solution.
2. Give the general real solution (obtained from your result inthe previous subquestion).

Lösung:

1. $y(t) = a \cdot e^{(-4+i)t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1-i \end{pmatrix} + b \cdot e^{(-4-i)t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \end{pmatrix}$
2. $y(t) = a \cdot e^{-4t} \begin{pmatrix} -2\cos(t) \\ \cos(t)+\sin(t) \end{pmatrix} + b \cdot e^{-4t} \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ \sin(t)-\cos(t) \end{pmatrix}$

HS17 Uebungsblatt 13 Aufgabe 3 Lösung:

Solution.

1. As usual, we first calculate the eigenvalues of the associated matrix:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

and find two complex solutions: $\lambda_1 = -4 + i$ and $\lambda_2 = -4 - i$. Next we look for the eigenvectors: For λ_1:

$$\begin{pmatrix} -3-(-4+i) & 2 \\ -1 & -5-(-4+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix}$$

The first row gives us $(1-i)y_1 + 2y_2 = 0$, so we find the eigenvector $v_1 = (-2, 1-i)$. Complex conjugating gives us the other eigenvector: $v_2 = (-2, 1+i)$. Thus, the general complex solution is given by:

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = C_1 e^{(-4+i)t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1-i \end{pmatrix} + C_2 e^{(-4-i)t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

2. We can obtain the general real solution by using Euler's formula. So: $e^{\lambda_1 t} = e^{(-4+i)t} = e^{-4t}(\cos t + i \sin t)$ and $e^{\lambda_2 t} = e^{-4t}(\cos t - i \sin t)$. We then obtain the real solutions by combining the two in the following way:

$$\frac{1}{2}\left(e^{\lambda_1 t} v_1 + e^{\lambda_2 t} v_2\right), \quad \frac{1}{2i}\left(e^{\lambda_1 t} v_1 + e^{\lambda_2 t} v_2\right),$$

which gives us:

$$e^{-4t} \begin{pmatrix} -2\cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}, \quad e^{-4t} \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

The final answer is then given by:

$$y(t) = C_1 e^{-4t} \begin{pmatrix} -2\cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} -2\sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$