MAT141 PVK

Zusatz-Aufgaben

Kurstag 1

Diverse Aufgaben inkl. Musterlösung

Inhaltsverzeichnis

MAT141 PVK

Zusatz-Aufgaben

(Kurstag 1)

Determinante & Inverse

(inkl. Musterlösung)

HS15 Uebungen Serie 4 Aufgabe 3

Berechne die Determinante der folgenden 3 x 3 Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Lösung: $\det\ A = 6 \qquad \det\ B = 0$

HS15 - Serie 4 - Aufgabe 3 Lösungen:

Aufgabe 3 Berechne die Determinante der folgenden 3 × 3 Matrizen

(i) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, (ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

///// (i) we compute the determinant using Gauss' algorithm

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & 18 \\ 0 & 22 & 30 \end{bmatrix} = (-1)13\left(30 - \frac{18 \cdot 22}{13}\right)$$
$$= 18 \cdot 22 - 30 \cdot 13 = 396 - 390 = 6.$$

(ii) we compute the determinant using Gauss' algorithm

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0. \quad /////$$

HS15 Uebungen Serie 3 Aufgabe 2 ii)

Bestimme alle $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ so dass die Matrix

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

invertierbar ist.

Lösung: $abc \neq 0$ resp. $a, b, c \neq 0$

HS15 - Serie 3 - Aufgabe 2 Lösungen:

(ii) Bestimme alle $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ so dass die Matrix

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

invertierbar ist und berechne deren Inverses.

///// If $a = 0$, then the first column is zero, hence the matrix is not invertible. If $c = 0$, then the last row is zero, hence the matrix is not invertible. If $b = 0$, then the first two columns are linearly dependent, hence the matrix is not invertible. Thus suppose $a, b, c \neq 0$, then

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & d & e & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & f & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{d}{ab} & -\frac{e}{ac} + \frac{df}{acb} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & -\frac{f}{cb} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{array}\right].$$

Note: Since the matrix is upper tridiagonal, $\det \begin{pmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc$. /////

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t+2 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Berechnen Sie in diesen Fällen Q^{-1}.

Lösung: $Q^{-1} = \frac{1}{(t+1)^2} \begin{pmatrix} t+2 & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ invertierbar für alle $t \neq -1$

MAT141 PVK

Zusatz-Aufgaben

(Kurstag 1)

Lineare Gleichungssysteme

(inkl. Musterlösung)

HS15 Uebungen Serie 1 Aufgabe 3

Betrachte das lineare Gleichungssystem dessen erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben ist durch

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{array}\right].$$

i) Für welche Werte von a und b in $\mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen?

ii) Für welche Werte von a und b in $\mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem keine Lösungen?

Lösung: i) $a = 5, b = 4$ ii) $a = 5, b \neq 4$

HS15 - Serie 1 - Aufgabe 3 Lösungen:

///// By Gauss elimination

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 & b-2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 & b-4 \end{array}\right].$$

If $a \neq 5$ we can perform the next step of Gauss elimination

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-2\frac{b-4}{a-5} \\ 0 & 1 & 0 & 1-\frac{b-4}{a-5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-4}{a-5} \end{array}\right]$$

In this case, the system can be uniquely solved and its solution is given by

$$\left[1-2\frac{b-4}{a-5}, 1-\frac{b-4}{a-5}, \frac{b-4}{a-5}\right].$$

If $a = 5$ and $b = 4$, then we arrive at

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

hence the set of solutions is a one-dimensional subspace of $\mathbb{R}^3$ parametrized by

$$\{(1-2t, 1-t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Finally, if $a = 5$ but $b \neq 4$, then we obtain

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

and the system does not admit a solution. /////

HS15 Uebungen Serie 1 Aufgabe 1+2

Bringe die folgenden linearen Gleichungssysteme mittels des Gausschen Eliminationsverfahren in Zeilen-Stufenform (Row Echelon Form) und bestimme danach die Menge aller Lösungen (in Parameterdarstellung).

iii)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 8 \\ x_1 & - & 5x_2 & + & x_4 & & & = & 5 \end{array}$$

Lösung: iii) $L = \{(5, 0, -2, 0)^T + x_4 \cdot (-1, 0, 0, 1)^T, x_4 \in \mathbb{R}\}$

HS15 - Serie 1 - Aufgabe 1+2 Lösungen:

For the first step of Gauss elimination we perform

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & -5 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{pmatrix} R_1^{new} = R_1 \\ R_2^{new} = (-2) \cdot R_1 + R_2 \\ R_3^{new} = (-1) \cdot R_1 + R_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

For the second step we perform

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{pmatrix} R_2^{new} = R_2 - R_3 \\ R_1^{new} = R_1 - 3R_2^{new} \\ R_3^{new} = R_3 + 8R_2^{new} \end{pmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

For the final step we perform

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{pmatrix} R_1^{new} = R_1 + R_3 \\ R_2^{new} = R_2 \\ R_3^{new} = -R_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right].$$

The set of solutions is a one dimensional subspace of $\mathbb{R}^4$ which can be parametrized by

$\{(5 - t, 0, -2, t) : t \in \mathbb{R}\}$. ////

Für einen Parameter $s \in \mathbb{R}$ betrachten wir das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ & & & & & (1+s)x_4 & = & -6 \end{array}$$

(i) Bestimmen Sie jeweils alle Werte des Parameters s, für die das LGS

a) keine Lösung hat

b) eine Lösungsmenge der Dimension 2 hat,

c) eine Lösungsmenge der Dimension 1 hat.

(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses LGS für $s = 2$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (1+s) & -6 \end{array}\right)$$ ist bereits in Zeilenstufenform :)

i) a) keine Lösung bei Zeile $0\ 0\ 0 \mid \neq 0$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{s = -1}}$

i) b) $\dim(L) = 2$ heisst A hat genau Rang $4-2=2$

$\dim(L) = n - r(A)$ (d.h. 2 "pivots" in Zeilenstufenform)

$\Leftrightarrow$ $r(A) = n - \dim(L)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (1+s) & -6 \end{array}\right)$$

$\hookrightarrow$ $\underline{\underline{\text{nicht möglich}}}$

(da keine echte Nullzeile
d.h. für $s=-1 \Rightarrow$ unlösbar)

i) c) $\dim(L) = 1$ heisst A hat genau Rang $4-1=3$

$\dim(L) = n - r(A)$

n: Anzahl Unbekannte, $r(A)$: Rang von A

(d.h. 3 "pivots" in Zeilenstufenform)

Lernkärtchen "LGS 2"

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (1+s) & -6 \end{array}\right)$$

hat Rang 3 (pivots) falls $\underline{\underline{s \neq -1}}$

ii) $s = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow \underbrace{\left|\begin{array}{l} x_1 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_4 = -6 \end{array}\right|}_{\text{kein "pivot" bei } x_3 \Rightarrow \text{ freie Vble } x_3} \quad \begin{array}{l} \\ \Rightarrow x_2 = 1 - 2x_3 \\ \Rightarrow x_4 = \frac{-6}{3} = -2 \end{array}$$

$x_3 = x_3$

$\Rightarrow I_{neu}: \quad x_1 + 3x_3 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3 - 3x_3$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_3 \in \mathbb{R} \right\}}}$$

MAT141 PVK

Zusatz-Aufgaben

(Kurstag 1)

Basis, linear unabhängig

(inkl. Musterlösung)

HS15 Uebungen Serie 4 Aufgabe 2 Entscheide, ob folgende Vektoren im $\mathbb{R}^3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Und wenn ja, stelle den Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Basisvektoren dar.

i) $a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$ ii) $a^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Lösung: i) $b = 9/5 \cdot a^{(1)} + 1/5 \cdot a^{(2)} - 2/5 \cdot a^{(3)}$ ii) $b = 5/42 \cdot a^{(1)} - 1/14 \cdot a^{(2)} + 5/6 \cdot a^{(3)}$

HS15 Uebungsblatt 04 Aufgabe 2 Lösung:

///// We simultaneously check $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, and $a^{(3)}$ for linear independence and solve $[A|b]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] \to\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{array}\right].$$

Consequently, $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ is a basis of $\mathbb{R}^3$ and

$$b = \frac{9}{5}a^{(1)} + \frac{1}{5}a^{(2)} - \frac{2}{5}a^{(3)}. \quad /////$$

(ii) $a^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

///// We simultaneously check $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, and $a^{(3)}$ for linear independence and solve $[A|b]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{42} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{6} \end{array}\right].$$

Consequently, $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ is a basis of $\mathbb{R}^3$ and

$$b = \frac{5}{42}a^{(1)} - \frac{1}{14}a^{(2)} + \frac{5}{6}a^{(3)}. \quad /////$$

MAT185 FS16 Probepruefung Aufgabe 1:

Aufgabe 1

Betrachten Sie die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \qquad v^{(2)} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$? *(1 Pt.)*

(b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ eine Basis des $\mathbb{C}^3$? *(1 Pt.)*

(c) Für welche Werte von a kann man den Vektor

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

als Linearkombination von $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ darstellen? Stellen Sie in diesem Fall den Vektor b in der Basis $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ dar. *(3 Pt.)*

(d) Sei der Vektor

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

in der Basis $[v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ gegeben. Geben Sie die Komponenten von c in der Standardbasis an. *(1 Pt.)*

Lösung:

Lösung

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ die Matrix mit Spalten $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$. Dann gilt

$$\det A = 1 + a^3 .$$

Damit ist $\det A = 0$ für $a = -1$ und $\det A \neq 0$ sonst. Also ist $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ für $a \neq -1$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Jede Basis des $\mathbb{R}^3$ ist auch eine Basis des $\mathbb{C}^3$ und damit ist $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ für $a \neq -1$ eine Basis des $\mathbb{C}^3$.

(c) Gesucht sind $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Also muss das LGS

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gelöst werden. Mit dem Gaussalgorithmus erhält man für $a \neq -1$:

$$\alpha = \frac{1-2a}{a^3+1}, \qquad \beta = \frac{a^2+2}{a^3+1}, \qquad \gamma = \frac{a(2a-1)}{a^3+1}.$$

Damit ist der Vektor b für $a \neq -1$ durch

$$b = \frac{1-2a}{a^3+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} + \frac{a^2+2}{a^3+1} \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{a(2a-1)}{a^3+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

darstellbar. Für $a = -1$ kann man den Vektor b nicht als Linearkombination von $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ darstellen.

(d) Die Komponenten von c in der Standardbasis sind gegeben durch

$$1v^{(1)} + 3v^{(2)} + 4v^{(3)} = \begin{bmatrix} 1+3a \\ 3+4a \\ 4+a \end{bmatrix}.$$

MAT185 FS08 Pruefung Aufgabe 4:

4 Gegeben sind im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt, wobei $\mathcal{B}$ eine Basis ist:

$$v := \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}\right).$$

Entscheiden Sie, ob $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis ist und stellen Sie v bezüglich $\mathcal{B}$ dar.

Lösung:

4 Vergleiche letztes Jahr Prüfung Aufg. 4, dieses Jahr Blatt 15 Aufg. 2, Blatt 16 Aufg. 2.

$\mathcal{B}$ ist keine Orthonormalbasis bezüglich Standardskalarprodukt, denn: $\langle \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\rangle = -\frac{1}{2} \neq 0$

Um v bezüglich $\mathcal{B}$ darzustellen löst man folgendes reelle, lineare Gleichungssystem:

$$x_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 4\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 2 & -2\sqrt{2} & 4\\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 2 & -2\sqrt{2} & 4\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Als Lösung ergibt sich $\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$, also $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{pmatrix}$

MAT185 FS11 Probepruefung Aufgabe 2:

Aufgabe 2

Betrachte folgende Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$u = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}.$$

(a) (*1 Punkt*) Bestimmen Sie, ob u und v linear unabhängig sind (mit Begründung).

(b) (*1/2 Punkt*) Bestimmen Sie die Dimension des Unterraums, der von u und v aufgespannt wird.

(c) (*1 Punkt*) Ist der Vektor $w = \left(\begin{smallmatrix}2\\6\\6\end{smallmatrix}\right)$ in dem von u und v aufgespannten Unterraum enthalten?

(d) (*1 Punkt*) Berechnen Sie $u \times v$ und $\langle u, v\rangle$.

(e) (*1/2 Punkt*) Entscheiden Sie, ob $u, v, u \times v$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Lösung:

(a) Aus $\alpha u + \beta v = 0$ folgt in der ersten Komponente: $\alpha = 3\beta$. Setzen wir das in die zweite Komponente ein, erhalten wir $0 = 6\beta + 4\beta = 10\beta$. Daraus folgt $\alpha = \beta = 0$. u und v sind linear unabhängig.

(b) 2.

(c) Gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so dass

$$\alpha u + \beta v = \begin{pmatrix}2\\6\\6\end{pmatrix}$$

Mit Gauss Elimination erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 2 & 6\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & -3 & -2\\ 0 & 10 & 10\\ 0 & 11 & 12\end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem kann nicht gelöst werden, also ist $\left(\begin{smallmatrix}2\\6\\6\end{smallmatrix}\right)$ nicht im von u und v aufgespannten Unterraum enthalten.

(d) $u \times v = \begin{pmatrix}-8\\11\\-10\end{pmatrix}, \qquad \langle u, v\rangle = -3 + 8 + 6 = 11.$

(e) Ja: Da u und v linear unabhängig sind, und da dann auch $u \times v$ rechtwinklig auf u und v steht, sind die drei Vektoren linear unabhängig.

MAT141 PVK

Zusatz-Aufgaben

(Kurstag 1)

Lineare Abbildungen

(inkl. Musterlösung)

HS15 Uebungen Serie 8 Aufgabe 3 ii) Bestimme die Matrixdarstellung von $R(\varphi)_{[v]\to[v]}$ von

$$R(\varphi) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

bezüglich der orthonormalen Basen $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}]$ mit $\quad v^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad v^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Lösung: ... $\to$ dieselbe Matrix mit Vorzeichenwechsel bei den sin. (Sei $R(\varphi) : x \mapsto Ax \Rightarrow R(\varphi)_{[v]\to[v]} = A^T$)

HS15 Uebungsblatt 08 Aufgabe 3ii) Lösung:

$$\begin{aligned}
R_{[v^-]\to[v^-]} &= \mathrm{Id}^T_{[v^-]\to[e]}\, R(\varphi)_{[e]\to[e]}\, \mathrm{Id}_{[v^-]\to[e]} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi + \sin\varphi & -\cos\varphi + \sin\varphi \\ \sin\varphi - \cos\varphi & -\sin\varphi - \cos\varphi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}. \quad /////
\end{aligned}$$

Vorzeigeaufgabe: Gegeben sei die Abbildung $T : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ mit

$$T(f) := f'' - 2f' + 3f^{(iv)} \cdot x \qquad \text{für } f \in \mathbb{R}_4[x].$$

Zeigen Sie, dass T eine lineare Abbildung ist.

T linear falls $T(\lambda \cdot f + g) = \lambda \cdot T(f) + T(g)$

$$\begin{aligned}
T(\lambda f + g) &= (\lambda \cdot f + g)'' - 2 \cdot (\lambda \cdot f + g)' + 3(\lambda f + g)'''' \cdot x \\
&= \lambda f'' + g'' - 2\lambda f' - 2g' + 3\lambda f'''' \cdot x + 3g'''' \cdot x \\
&= \lambda \cdot (f'' - 2f' + 3f'''' \cdot x) + (g'' - 2g' + 3g'''' \cdot x) \\
&= \lambda \cdot T(f) + T(g)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ <u>T ist eine lineare Abbildung</u>

MAT141 HS18 Serie 13 Aufgabe 2:

(a)

Betrachte für $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} b \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ c \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von a, b, c sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 paarweise orthogonal? Bilden sie (für diese Wahl von a, b, c) eine orthonormale Basis?

(b)

Sei $a = b = c = 0$.

(i) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(iI) Sei $u = (1, 0, -1)^T \in \mathbb{R}^3$. Finden Sie die Koordinaten von u in der Basis v_1, v_2, v_3.

(iii) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Rotation von $90°$ um die x-Achse.

Finden Sie die Matrixdarstellung von F in der Basis v_1, v_2, v_3.

Lösung:

(a) $a = 2,\ b = 1,\ c = -12$ Nein (nicht normiert)

(b) i) $\det(v_1 v_2 v_3) = 3 \neq 0$ ii) $(-1, 3, 1)^T$ iii) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2/3 & 2/3 & -1 \end{pmatrix}$

Lösungen HS18 Serie 13 Aufgabe 2:

Solution:

(a) The requirement that v_1, v_2 are orthogonal leads to the equation

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 2b - a = 0.$$

Similarly, the requirement that v_2, v_3 and v_1, v_3 are orthogonal lead to the equations

$$\langle v_2, v_3 \rangle = 3b - 3 = 0$$
$$\langle v_1, v_3 \rangle = 6 + 3a + c = 0.$$

This leads to the system of linear equations

$$\begin{cases} 2b - a & = 0 \\ 3b - 3 & = 0 \\ 6 + 3a + c & = 0 \end{cases}$$

The fastest way to solve it is to notice that the second equation implies $b = 1$, and then the first equation implies $a = 2$. The last equation then gives $c = -12$. Since the vectors are not normalized they do not form an orthonormal basis.

(b) (i) We have to check that the vectors are linearly independent. One way to do this is to consider the matrix

$$A = (v_1|v_2|v_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and compute its determinant which is $\det A = 3 \neq 0$ (expand with respect to the last column). Hence A is regular which is the case precisely if its column vectors are linearly independent.

(ii) The coordinate transformation matrix from the standard basis to $[v] = [v_1, v_2, v_3]$ is given by A^{-1}. We compute using Gauss algorithm:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I \leftrightarrow III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{III-2II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{II-III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{II \to -II \\ III \to \frac{1}{3} III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -2/3 \end{array}\right)$$

Hence

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$$

and the coordinates of u in this basis are given by

$$A^{-1}u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) The matrix of a rotation around the x-axis is given (in the standard basis) by

$$F_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

where α is the angle of rotation, in particular, for $\alpha = 90^\circ = \pi/2$ we have

$$F_{[e]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In the basis V, the matrix is given by

$$\begin{aligned} F_{[v]} &= \mathrm{Id}_{[e]\to[v]} F_{[e]} \mathrm{Id}_{[v]\to[e]} = A^{-1} F_{[e]} A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2/3 & 2/3 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

MAT141 HS17 Serie 8 Aufgabe 2:

Entscheide, welche der folgenden Abbildungen linear ist (mit Begründung).

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_2 + x_3)$,

(b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$,

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_2, x_3 + 1)$,

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_1 + x_2)$.

Lösung:

(a) linear (b) linear
(c) nicht linear (zeige bsp $f(v) + f(w) \neq f(v + w)$)
(d) nicht linear (zeige bsp $f(\lambda v) \neq \lambda f(v)$)

Lösungen HS17 Serie 8 Aufgabe 2:

Solution. Recall that, if V, W are two $\mathbb{R}$-vector spaces, a map $f : V \to W$ is said to be linear if $f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w)$, for each $v, w \in V$ and $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. f_1 is clearly linear, in fact, if $v = (v_1, v_2, v_3)$ and $w = (w_1, w_2, w_3)$, then

$$
\begin{aligned}
f(\alpha v + \beta w) = f(\alpha v_1 + \beta w_1, \alpha v_2 + \beta w_2, \alpha v_3 + \beta w_3) = \\
\big((\alpha v_1 + \beta w_1) + 2(\alpha v_2 + \beta w_2) + (\alpha v_3 + \beta w_3), (\alpha v_2 + \beta w_2) + (\alpha v_3 + \beta w_3)\big) = \\
(\alpha v_1 + 2\alpha v_2 + \alpha v_3, \alpha v_2 + \alpha v_3) + (\beta w_1 + 2\beta w_2 + \beta w_3, \beta w_2 + \beta w_3) = \\
= \alpha(v_1 + 2v_2 + v_3, v_2 + v_3) + \beta(w_1 + 2w_2 + w_3, w_2 + w_3) = \\
= \alpha f(v) + \beta f(w),
\end{aligned}
$$

■

which shows that the map is linear.

2. The same argument as before shows that the map f_2 is linear.

3. The map f_3 is not linear. In fact, we can see that taking $v = (1, 0, 0)$ and $w = (0, 1, 0)$, then $f(v) = (1, 0, 1)$, $f(w) = (2, 1, 1)$ and so $f(v) + f(w) = (2, 1, 2)$, while $f(v + w) = f(1, 1, 0) = (3, 1, 1)$. Therefore,

$$f(v) + f(w) \neq f(v + w),$$

which shows taht the map is not linear.

2

4. As before, it is easy to find a counterexample that shous that f_4 is not linear. For example, using the vector $v = (1, 0)$, we see that $f(2v) = f((2, 0, 0)) = (4, 0)$ which is not equal to $2f(v) = (2, 0)$.

MAT141 HS17 Serie 8 Aufgabe 3:

Betrachte die Abbiduung $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x_1,x_2)=(x_1+2x_2,x_1-x_2)$.

(a) Zeige, dass f eine lineare Abbildung ist. Berechne $f(3,1)$ und zeige, dass $f(3,1)=3f(1,0)+f(0,1)$.

(b) Berechne die Matrixdarstellung $A=f_{[e]\to[e]}$ bzgl. der Standardbasis $[e]$.

(c) Zeige, dass die Vektoren $w^{(1)}=\binom{1}{1}$ und $w^{(2)}=\binom{2}{-1}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden.

Berechne $\mathrm{Id}_{[e]\to[w]}$ für $[w]=[w^{(1)},w^{(2)}]$.

(d) Berechne $f_{[e]\to[w]}$.

Lösung:

(a) $3\cdot(1,1)+(2,-1)=(5,2)$

(b) $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}$ (c) $\mathrm{Id}_{[e]\to[w]}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}$ (d) $f_{[e]\to[w]}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

Solution.

1. - $f(3,1)=(5,2)$,
   - $f(1,0)=(1,1)$,
   - $f(0,1)=(2,-1)$,

   and the second part easily follows. ∎

2. The matrix representation is given by
$$A=\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}.$$

3. It is easy to see that the two vectors are linearly independent and so they form a basis of $\mathbb{R}^2$.
   Moreover, $e^{(1)}=\frac{1}{3}(w^{(1)}+w^{(2)})$ and $e^{(2)}=\frac{1}{3}(2w^{(1)}-w^{(2)})$, hence
$$Id_{[e_{\mathbb{R}^2}]\mapsto[w]}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}.$$

4. A straightforward computation shows that
$$f_{[e_{\mathbb{R}^2}]\mapsto[w]}=Id_{[e_{\mathbb{R}^2}]\mapsto[w]}f_{[e_{\mathbb{R}^2}]\mapsto[e_{\mathbb{R}^2}]}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

MAT185 FS09 Probepruefung Aufgabe 3:

3 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie A als Abbildungsmatrix der Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in Bezug auf die Standardbasis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix von ϕ bezüglich der Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösung:

3 In der Basis

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

hat die Abbildungsmatrix von ϕ gemäss Aufgabe folgende Gestalt

$$A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist nun die Abbildungsmatrix $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ von ϕ bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \circ T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ oder, mit Matrix-Multiplikation $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$,

wobei $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ die Transformationsmatrix des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ und $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ deren Inverse (siehe Serie 3) beschreibt. $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ lässt sich in diesem Fall leicht ablesen, da $\mathcal{A}$ gerade die Standardbasis ist

$$T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung der Inversen verwenden wir den Gauss-Jordan Algorithmus.
Wir starten mit $[T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} I]$ und führen dann die Elimination aus, um $[I T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}]$ zu erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 - 2l_1]{l_2 \leftarrow l_2 + 8l_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_3 \leftarrow 4 * l_3 - l_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftarrow -l_2 + 7l_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -8 & -8 & 28 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_1 \leftarrow l_1 - l_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & -8 & -8 & 28 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[l_3 \leftarrow -l_3]{l_2 \leftarrow -1/4 l_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4. \end{pmatrix}.$$

$(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^{-1} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ ist also

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir nun die gesuchte Abbildungsmatrix B berechnen:

$$\begin{aligned} B &= M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -16 & 6 & 0 \\ 32 & -18 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

MathCourses

MAT141 PVK

Zusatz-Aufgaben

(Kurstag 1)

Komplexe Zahlen

(inkl. Musterlösung)

HS17 Uebungen Serie 6 Aufgabe 4

(a) Für welche Werte von $a \in \mathbb{C}$ hat das folgende komplexe lineare Gleichungssystem

(i) keine Lösung? (ii) genau eine Lösung? (iii) unendlich viele Lösungen?

$$\begin{aligned} z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 &= 0 \\ ia^2 z_1 + z_2 + (1+i)a^2 z_3 &= a - i \\ iz_1 - z_2 + iz_3 &= a + i \end{aligned}$$

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem für $a = 3i$.

Lösung: (a) (i) $a = -i$ (ii) $a \neq \pm i$ (iii) $a = +i$ (b) $L = \{(15/4 + 4i, -i/4, -4i)\}$

Exercise 4. (4 points) Consider the following linear system with complex coefficients

$$\begin{aligned} z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 &= 0 \\ ia^2 z_1 + z_2 + (1+i)a^2 z_3 &= a - i \\ iz_1 - z_2 + iz_3 &= a + i\,, \end{aligned}$$

where $a \in \mathbb{C}$.

1. Use Gaussian elimination to bring it in row echelon form.(1 point)
2. Discuss the existence and unicity of solutions according to the values of a. (2 points)
3. Solve the system explicitly for $a = 3i$. (1 point)

Solution.

1. By substituting $R_2 \to R_2 - ia^2 R_1$ and $R_3 \to R_3 - iR_1$ we find
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1-i & 0 \\ ia^2 & 1 & (1+i)a^2 & a-i \\ i & -1 & i & a+i \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1-i & 0 \\ 0 & 1+a^2 & 0 & a-i \\ 0 & 0 & -1 & a+i \end{array}\right).$$

2. For $a^2 + 1 \neq 0 \leftrightarrow a \neq \pm i$ the coefficient matrix is non singular, hence the solution is unique.
For $a = -i$ the system becomes
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$
The second equation reads $0 \cdot z_2 = -2i$, so the system has no solution.
For $a = i$ we have
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2i \end{array}\right).$$
The second equation gives $0 \cdot z_2 = 0$, thus the system has infinite solutions.

3. For $a = 3i$ the system becomes
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1-i & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & -1 & 4i \end{array}\right)$$
and the solution is given by
$$L = \left\{\left(\frac{15}{4} + 4i, -\frac{i}{4}, -4i\right)\right\}.$$ ■

HS15 Uebungen Serie 6 Aufgabe 1

a) Entscheide, ob folgende Vektoren in $\mathbb{C}^3$ linear abhängig sind oder nicht:

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -1+i \end{bmatrix}, \qquad a^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4-2i \\ -3+5i \end{bmatrix}, \qquad a^{(3)} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

b) Für welche komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ verschwindet die Determinante von

$$\begin{bmatrix} 1+2i & 3+4i \\ z & 1-2i \end{bmatrix}^{25}$$

Lösung: a) linear unabhängig b) $z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

HS15 - Serie 6 - Aufgabe 1a)

///// The first step of Gauss elimination yields

$$\begin{bmatrix} 1+i & 0 & 1+i \\ 1-i & 4-2i & 0 \\ -1+i & -3+5i & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4-2i & -1+i \\ 0 & -3+5i & 4-i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 20-10i & -5+5i \\ 0 & -6+10i & 8-2i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 14 & 3+3i \\ 0 & -6+10i & 8-2i \end{bmatrix},$$

and we compute

$$8-2i-\frac{1}{14}(3+3i)(-6+10i) = 8-2i-\frac{1}{14}(-48+12i) \neq 0.$$

Therefore, the three vectors are $\mathbb{C}$-linearly independent.

Alternatively, one can compute the determinant

$$\begin{aligned}&(1+i)(4-2i)3+(1+i)(1-i)(-3+5i)-((-1+i)(4-2i)(1+i)) \\ &= (6+2i)3+2(-3+5i)+2(4-2i) = (18-6+8)+(6+10-4)i = 20+12i \neq 0.\end{aligned}$$ /////

HS15 - Serie 6 - Aufgabe 1b)

$$\det B = [(1+2i)(1-2i)-(3+4i)z]^{25} = [5-(3+4i)z]^{25}.$$

Therefore, $\det B = 0$ if

$$z = \frac{5}{3+4i} = \frac{5(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{15-20i}{25} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i.$$ /////

HS15 Probeprüfung Aufgabe 2

i) Berechne die Determinante von

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1+i & -1+i & 1-i \end{pmatrix}^4.$$

iii) Bestimme die Nullstellen von $p(z) = z^4 - i$.

Lösung: i) 16 iii) $e^{\pi/8+(j-1)\cdot\pi/2}$, $1 \leq j \leq 4$

HS15 - Probeprüfung - Aufgabe 2a)

(i) Berechne die Determinante von

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1+i & -1+i & 1-i \end{pmatrix}^4.$$

///// By expanding $\det(A)$ with respect to the first row one computes $\det(A) = i((1-i) + (-1+i)) + 1(1-i-1-i) = -2i$ and $\det(A^4) = \det(A)^4 = 16$. /////

HS15 - Probeprüfung - Aufgabe 2c)

(iii) Bestimme die Nullstellen von $p(z) = z^4 - i$.

///// The solutions of $z^4 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ are given by

$$z_i = e^{i\psi_j},\ j \in \{0,\ldots,3\} \quad \text{with} \quad \psi_j = \frac{\pi}{8} + j(\frac{\pi}{2}).$$ /////

MAT185 FS08 Repetitionspruefung Aufgabe 1:

1 Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $x^6 - 8 = 0$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Vereinfachen Sie soweit wie möglich. (3 Punkte)

Lösung:

Mathematik für die Chemie

HS 2007 - FS 2008 – Nachholklausur

Resultate

1 Vergleiche letztes Jahr Prüfung und Repitition Aufg. 5(b), dieses Jahr Blatt 3 Aufg. 1, Lernkontrolle 1 Aufg. 1, Prüfung Aufg. 1.
Löse die Gleichung $2^3 = 8 = x^6$ durch die Lösungsmethode für reine polynomielle Gleichungen:
$\{\sqrt[6]{2^3}e^{(0+0\cdot2)\cdot\frac{\pi i}{6}}, \sqrt[6]{2^3}e^{(0+1\cdot2)\cdot\frac{\pi i}{6}}, \sqrt[6]{2^3}e^{(0+2\cdot2)\cdot\frac{\pi i}{6}}, \sqrt[6]{2^3}e^{(0+3\cdot2)\cdot\frac{\pi i}{6}}, \sqrt[6]{2^3}e^{(0+4\cdot2)\cdot\frac{\pi i}{6}}, \sqrt[6]{2^3}e^{(0+5\cdot2)\cdot\frac{\pi i}{6}}\} =$
$\{\sqrt{2}, \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})), \sqrt{2}(\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})), -\sqrt{2}, \sqrt{2}(\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{4\pi}{3})), \sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{3})+i\sin(\frac{5\pi}{3}))\} =$
$\{\sqrt{2}, \sqrt{2}(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}), \sqrt{2}(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}), -\sqrt{2}, \sqrt{2}(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}), \sqrt{2}(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})\} =$
$\{\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}, -\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}\}$

MAT185 FS08 Probepruefung Aufgabe 1:

1 Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $(x^4)^2 - 2x^4 + 1 = 0$ in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Vereinfachen Sie soweit wie möglich. (3 Punkte)

Lösung:

Mathematik für die Chemie

HS 2007 - FS 2008 – Klausur

Resultate

1 Vergleiche letztes Jahr Prüfung Aufg. 5(b), Repitition Aufg. 5(b), dieses Jahr Blatt 3 Aufg. 1.
Substituiere zunächst $z = x^4$, und löse die quadratische Gleichung $z^2 - 2z + 1 = 0$: $z_{1/2} := \frac{2\pm\sqrt{4\cdot1-2^2}}{2} = 1$. Löse anschließend die Gleichung $1 = 1\cdot e^{0\pi i} = z = x^4$ durch die Lösungsmethode für reine polynomielle Gleichungen: $\{\sqrt[4]{1}e^{(0+0\cdot2)\cdot\frac{\pi i}{4}}, \sqrt[4]{1}e^{(0+1\cdot2)\cdot\frac{\pi i}{4}}, \sqrt[4]{1}e^{(0+2\cdot2)\cdot\frac{\pi i}{4}}, \sqrt[4]{1}e^{(0+3\cdot2)\cdot\frac{\pi i}{4}}\} =$
$\{e^{0\pi i}, e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{\pi i}, e^{\frac{3\pi}{2}i}\} = \{1, i, -1, -i\} = \{1+0i, 0+1i, -1+0i, 0+(-1)i\}$