MathCourses

MAT141 PVK

Vorzeigeaufgaben

Lineare Abbildung:

Vektorraum der Polynome

Zusatz: Lineare Abbildung

HS15 Probeprüfung Aufgabe 1

Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{P}_3$ der Polynome in einer Variablen mit reellen Koeffizienten vom Grade höchstens 3,

$$\mathcal{P}_3 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 | a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

und bezeichne mit $[v] = [v^{(0)}, v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ die Standardbasis von $\mathcal{P}_3$,

$$v^{(0)} = 1, v^{(1)} = t, v^{(2)} = t^2, v^{(3)} = t^3.$$

Sei $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ die Abbildung

$$(Tp)(t) = tp'''(t) + 2p'(t) + 3p(t).$$

i) Zeige, dass T linear ist.

ii) Bestimme die Matrixdarstellung $T_{[v]\to[v]}$ von T bezüglich der Basis $[v]$.

Lösung:

ii) $T_{[v]\to[v]} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

HS16 Probeprüfung Aufgabe 2

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $K_3[x]$ der Polynome in einer Variablen mit reellen Koeffizienten vom Grad höchstens 3 sowie die Abbildung,

$$T \ : K_3[x] \to K_3[x], \quad T(p(x)) = p'''(x) - 2p''(x) + p'(x).$$

a) Zeige, dass T linear ist.

b) Betrachten Sie die Basis $[b] = \left[x^3, x^2 + 2x, x, x + 1\right]$. Bestimmen Sie $T_{[b]\to[b]}$.

c) Bestimmen Sie die Dimension der Bildmenge von T.

Lösung:

b) $T_{[b]\to[b]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 4 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$

HS15 Probeprüfung Aufgabe 1

Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{P}_3$ der Polynome in einer Variablen mit reellen Koeffizienten vom Grade höchstens 3,

$$\mathcal{P}_3 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 | a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

und bezeichne mit $[v] = [v^{(0)}, v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ die Standardbasis von $\mathcal{P}_3$,

$$v^{(0)} = 1, v^{(1)} = t, v^{(2)} = t^2, v^{(3)} = t^3.$$

Sei $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ die Abbildung

$$(Tp)(t) = tp'''(t) + 2p'(t) + 3p(t).$$

i) Zeige, dass T linear ist.

ii) Bestimme die Matrixdarstellung $T_{[v]\to[v]}$ von T bezüglich der Basis $[v]$.

i) T ist linear falls gilt:

$$T(\lambda \cdot p + g)(t) = \lambda \cdot (Tp)(t) + (Tg)(t)$$

$$\|$$

$$t \cdot (\lambda p + g)'''(t) + 2 \cdot (\lambda p + g)'(t) + 3 \cdot (\lambda p + g)(t)$$

Summenregel beim Ableiten sowie konstanter Faktor-Regel

$$= t \cdot \lambda \cdot p'''(t) + t \cdot g'''(t) + 2\lambda p'(t) + 2g'(t) + 3\lambda p(t) + 3g(t)$$

$$= \lambda \cdot \underbrace{(t \cdot p'''(t) + 2p'(t) + 3p(t))}_{(Tp)(t)} + \underbrace{t \cdot g'''(t) + 2g'(t) + 3g(t)}_{(Tg)(t)}$$

$$= \lambda \cdot (Tp)(t) + (Tg)(t) \quad \checkmark$$

$\longrightarrow$ T ist linear

ii)

Bestimme $T_{[v] \to [v]}$ bezüglich der Standard-Basis $[v]$

- Basis: $[v] = [\, v^{(0)}, v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)} \,]$

$$v^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

- ursprünglicher Vektor:

d.h. $p(t) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3$

hat Koordinaten bezüglich $[v]$:

$$P_{[v]}(t) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_0 \cdot v^{(0)} + a_1 \cdot v^{(1)} + a_2 \cdot v^{(2)} + a_3 \cdot v^{(3)}$$

- Bildvektor:

$$(Tp)(t) = t \cdot p'''(t) + 2 \cdot p'(t) + 3 \cdot p(t)$$

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$p'(t) = a_1 + 2a_2 \cdot t + 3a_3 \cdot t^2$$

$$p''(t) = 2a_2 + 6a_3 \cdot t$$

$$p'''(t) = 6a_3$$

$$\Rightarrow (Tp)(t) = t\cdot(6a_3) + 2\cdot(a_1 + 2a_2\cdot t + 3a_3\cdot t^2) + 3\cdot(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3)$$

sortieren und t^3, t^2, t, 1 ausklammern

$$= 6a_3\cdot t + 2a_1 + 4a_2\cdot t + 6a_3\cdot t^2 + 3a_0 + 3a_1\cdot t + 3a_2\cdot t^2 + 3a_3\cdot t^3$$

$$= 3a_3\cdot t^3 + (3a_2 + 6a_3)\cdot t^2 + (3a_1 + 4a_2 + 6a_3)\cdot t + (3a_0 + 2a_1)\cdot 1$$

hat Koordinaten bezüglich $[v]$:

$$(Tp)_{[v]}(t) = \begin{pmatrix} 3a_0 + 2a_1 \\ 3a_1 + 4a_2 + 6a_3 \\ 3a_2 + 6a_3 \\ 3a_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \text{"}a_0\text{"} \quad \text{"}a_1\text{"} \quad \text{"}a_2\text{"} \quad \text{"}a_3\text{"} \\ \begin{pmatrix} 3a_0 + 2a_1 + 0a_2 + 0\cdot a_3 \\ 0a_0 + 3a_1 + 4a_2 + 6a_3 \\ 0a_0 + 0a_1 + 3a_2 + 6a_3 \\ 0a_0 + 0a_1 + 0a_2 + 3a_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

• Abbildungsmatrix aufstellen:

$$\underbrace{\begin{array}{cccc} \text{"}a_0\text{"} & \text{"}a_1\text{"} & \text{"}a_2\text{"} & \text{"}a_3\text{"} \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{T_{[v]\to[v]}} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{[v]} = \begin{array}{c} \text{"}a_0\text{"} \quad \text{"}a_1\text{"} \quad \text{"}a_2\text{"} \quad \text{"}a_3\text{"} \\ \begin{pmatrix} 3a_0 + 2a_1 + 0a_2 + 0\cdot a_3 \\ 0a_0 + 3a_1 + 4a_2 + 6a_3 \\ 0a_0 + 0a_1 + 3a_2 + 6a_3 \\ 0a_0 + 0a_1 + 0a_2 + 3a_3 \end{pmatrix}_{[v]} \end{array}$$

HS16 Probeprüfung Aufgabe 2

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $K_3[x]$ der Polynome in einer Variablen mit reellen Koeffizienten vom Grad höchstens 3 sowie die Abbildung,

$$T\ : K_3[x] \to K_3[x], \quad T(p(x)) = p'''(x) - 2p''(x) + p'(x).$$

a) Zeige, dass T linear ist.

b) Betrachten Sie die Basis $[b] = \left[x^3, x^2 + 2x, x, x+1\right]$. Bestimmen Sie $T_{[b]\to[b]}$.

c) Bestimmen Sie die Dimension der Bildmenge von T.

a) T ist linear falls gilt:

$$T(\lambda \cdot p + g)(x) = \lambda \cdot T(p(x)) + T(g(x))$$

$$\|$$

$$(\lambda p + g)'''(x) - 2 \cdot (\lambda p + g)''(x) + (\lambda p + g)'(x)$$

Summenregel beim Ableiten sowie konstanter Faktor-Regel

$$= \lambda \cdot p'''(x) + g'''(x) - 2\lambda p''(x) - 2g''(x) + \lambda p'(x) + g'(x)$$

$$= \lambda \cdot \underbrace{\left(p'''(x) - 2p''(x) + p'(x)\right)}_{T(p(x))} + \underbrace{\left(g'''(x) - 2g''(x) + g'(x)\right)}_{T(g(x))}$$

$$= \lambda \cdot T(p(x)) + T(g(x)) \quad \checkmark$$

$\longrightarrow$ T ist linear

HS16 Probeprüfung Aufgabe 2

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $K_3[x]$ der Polynome in einer Variablen mit reellen Koeffizienten vom Grad höchstens 3 sowie die Abbildung,

$$T \ : K_3[x] \to K_3[x], \quad T(p(x)) = p'''(x) - 2p''(x) + p'(x).$$

a) Zeige, dass T linear ist.

b) Betrachten Sie die Basis $[b] = [x^3, x^2 + 2x, x, x+1]$. Bestimmen Sie $T_{[b]\to[b]}$.

c) Bestimmen Sie die Dimension der Bildmenge von T.

b) $T_{[b]\to[b]} = \mathrm{Id}_{[v]\to[b]} \cdot T_{[v]\to[v]} \cdot \mathrm{Id}_{[b]\to[v]}$

1) Bestimme $T_{[v]\to[v]}$ bezüglich der Standard-Basis $[v]$

- Basis: $[v] = [\,v^{(0)}, v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\,]$

$$v^{(0)} = \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ursprünglicher Vektor:

d.h. $p(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \cdot 1$

hat Koordinaten bezüglich $[v]$:

$$P_{[v]}(x) = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = a_3 \cdot v^{(0)} + a_2 \cdot v^{(1)} + a_1 \cdot v^{(2)} + a_0 \cdot v^{(3)}$$

• Bildvektor : $T(p(x)) = p'''(x) - 2 \cdot p''(x) + p'(x)$

$$p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$p'(x) = 3a_3 \cdot x^2 + 2a_2 \cdot x + a_1$$

$$p''(x) = 6a_3 \cdot x + 2a_2$$

$$p'''(x) = 6a_3$$

$$\Rightarrow T(p(x)) = 6a_3 - 2(2a_2 + 6a_3 \cdot x) + (a_1 + 2a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2)$$

$$= 0 \cdot x^3 + 3a_3 \cdot x^2 + (-12a_3 + 2a_2) \cdot x + (6a_3 - 4a_2 + a_1) \cdot 1$$

hat Koordinaten bezüglich [V]:

$$T(p(x)) = \begin{array}{cc} \text{"}a_3\text{" \ "}a_2\text{" \ "}a_1\text{" \ "}a_0\text{"} & \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 3a_3 \\ -12a_3 + 2a_2 \\ 6a_3 - 4a_2 + a_1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{array} \end{array}$$

• Abbildungsmatrix aufstellen:

$$\underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{"}a_3\text{"} & \text{"}a_2\text{"} & \text{"}a_1\text{"} & \text{"}a_0\text{"} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}}_{T_{[V] \to [V]}} \cdot \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}_{[V]} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{"}a_3\text{"} & \text{"}a_2\text{"} & \text{"}a_1\text{"} & \text{"}a_0\text{"} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 + 0 + 0 + 0 \\ 3a_3 + 0 + 0 + 0 \\ -12a_3 + 2a_2 + 0 + 0 \\ 6a_3 - 4a_2 + a_1 + 0 \end{pmatrix}_{[V]} \end{array}$$

2) Basiswechsel: $T_{[b]\to[b]} = Id_{[v]\to[b]} \cdot T_{[v]\to[v]} \cdot Id_{[b]\to[v]}$

b) Betrachten Sie die Basis $[b] = [x^3, x^2+2x, x, x+1]$. Bestimmen Sie $T_{[b]\to[b]}$.

- neue Basis:

$$\begin{array}{c} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b^{(1)}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b^{(2)}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b^{(3)}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b^{(4)}}$$

- $T_{[v]\to[v]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $Id_{[b]\to[v]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $Id_{[v]\to[b]} = \left(Id_{[b]\to[v]}\right)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III - 2 \cdot II} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \; III - IV$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow Id_{[v]\to[b]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T_{[b]\to[b]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{[b]\to[b]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 4 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

c) Bestimmen Sie die Dimension der Bildmenge von T.

Bildmenge von T

$\hat{=}$ alle möglichen Linearkombinationen der Spaltenvektoren von T

mit $\mathrm{Dim}(\mathrm{Bild}(T)) = \dim(\mathrm{range}(T)) = r(T)$

$\mathrm{Dim}(\text{Bildmenge})$ = Anz. Basisvektoren der Bildmenge

= Anz. linear unabhängiger Spaltenvektoren von T

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 4 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\mathrm{II}+4\cdot\mathrm{III} \\ \mathrm{I}-24\cdot\mathrm{III}}]{\mathrm{IV}-\mathrm{III}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -18 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{II}]{\mathrm{I}+9\cdot\mathrm{II}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{array}$$

$\Rightarrow r(T) = 3 = \mathrm{Dim}(\text{Bildmenge})$

Bem. 1: Man hätte auch Zeilenumformungen machen können, denn $r(T)$ = Spaltenrang = Zeilenrang

Bem. 2: Basis für den Bildraum ist z.B. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

x^2 1 x

oder besser gleich ONB $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Bem. 3: $\dim(\mathrm{kern}(T)) = n - \dim(\mathrm{Bild}(T)) = n - r(A) = 4 - 3 = 1$

$T(p(x)) = 0 \longrightarrow Tx = 0 \longrightarrow x_1 = x_1,\ x_2 = x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow \mathrm{kern}(T) = \{(x_1, 0, 0, 0), x_1 \in \mathbb{R}\}$