MathCourses

MAT141 PVK

Zusatz: Prüfe ob

Untervektorraum (subset)

Überprüfen ob eine Funktion linear ist:

Eine Funktion mit Abbildungsmatrix T ist linear, falls gilt:

$T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$

Untervektorraum prüfen:

W ist ein (Unter-)Vektorraum, falls

- $0 \in W$
- $\lambda \cdot a + b \in W \quad \forall a, b \in W, \lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

HS21 - Ue9

1. (5 points) Decide which of the following subsets are linear subspaces of the corresponding $\mathbb{R}$-vector spaces.

   (a) (1 point) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0\}$.

   (b) (1 point) $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 6\}$.

   (c) (1 point) $L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 0\}$.

   (d) (2 points) $GL_{\mathbb{R}}(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A \text{ is regular}\}$.

- $0 \in W$?
- $(\lambda a + b) \in W$?

a) • $(0,0,0) \in W$? $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 \overset{?}{=} 0$ ✓

$a = (x_1, x_2, x_3)$ und $b = (y_1, y_2, y_3) \in W$ (erfüllen beide die Gleichung)

• $\lambda a + b = ((\lambda x_1 + y_1), (\lambda x_2 + y_2), (\lambda x_3 + y_3)) \in W$?

$2(\lambda x_1 + y_1) + 3(\lambda x_2 + y_2) + 6(\lambda x_3 + y_3) = \ldots\ldots =$

$= \lambda \underbrace{(2x_1 + 3x_2 + 6x_3)}_{=0 \text{ da } a \in W} + \underbrace{(2y_1 + 3y_2 + 6y_3)}_{=0 \text{ da } b \in W} = \lambda \cdot 0 + 0 = 0 \in W$ ✓

Anz. Unbek. − Anz. Gl.

$\longrightarrow$ W ist ein Untervektorraum (mit dim $3 - 1 = 2$)

b) • $0 = (0,0,0,0) \in V$?

$0 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 6$?

$0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \neq 6$ d.h. $0 \notin V$

$\longrightarrow$ V ist kein Untervektorraum

c) $L = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot x_2 = 0 \}$

• $0 = (0,0) \in L$?

$0 \cdot 0 \overset{\checkmark}{=} 0$

• $\lambda (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \in L$ falls $x_1 \cdot x_2 = 0$ und $y_1 \cdot y_2 = 0$?

$\downarrow$ nur 1 Faktor muss 0 sein

Gegenbeispiel $\longleftarrow$ • "·" immer verdächtig (nicht linear)

$\overset{\lambda}{\overset{\shortparallel}{2}} (0,1) + (1,0) = (1,2)$

$1 \cdot 2 = 2 \neq 0 \longrightarrow$ L ist kein Untervektorraum

d) $GL_{\mathbb{R}}(3) = \{ A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A \text{ regulär} \}$

A ist regulär $\longleftrightarrow r(A) = 3 \longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

• $0 \in GL_{\mathbb{R}}(3)$?

$\mathrm{Det}(0) \overset{!}{=} 0 \rightarrow 0 \notin GL_{\mathbb{R}}(3) \longrightarrow GL_{\mathbb{R}}(3)$ kein Untervektorraum