MAT141 PVK

Exkurs

Dimension bestimmen

Dimension bestimmen

- Dimension eines Vektorraums $V \triangleq$ Anzahl Basisvektoren

- $V = \mathbb{R}^n \longrightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = n \iff V$ hat n Basisvektoren

- $M = \Big\{ \underbrace{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3 = v_1 + v_2} \Big\}$

$\downarrow$

2 linear unabhängige Vektoren $\longrightarrow V = \text{span}(M)$ hat $\dim(V) = 2$

alle Linearkombinationen
$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3$

Dimension einer Matrix A $\left(\text{allgemein: } \underset{\text{Zeilen}}{[r}, \underset{\text{Spalten}}{s]} \right)$

kommt darauf an, WAS die Matrix A darstellt?!

Die Matrix A repräsentiert:

- eine Abbildungsmatrix $\underset{[m \times n]}{A}$ $\big(\underset{\text{lineare Abb.}}{f_A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ v \longmapsto T_A(v) = A \cdot v \big)$

$$\text{Rang}(A) = r(A) = \dim(\underbrace{\text{Bildraum}(f)}_{= C_A}) = \dim(\text{range}(f))$$

$C_A \underset{\text{Skript}}{=}$ Linearkomb. aller Spaltenvektoren von A

$$\dim(\text{range}(f)) + \dim(\text{kernel}(f)) = n$$

- die Lösungsmenge L eines homogenes LGS $\underset{[m \times n]}{A} \cdot x = 0$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ — n Variablen

Lösungsmenge L hat $\dim(L) = n - r(A)$ = Anz. frei wählbare Parameter

Falls A eine Abb.matrix $\longrightarrow$ $L = \text{kernel}(f)$