



MAT141 PVK

Kurstag 2

provisorisch - werden noch fürs HS23 überarbeitet

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat141.html



MAT141 PVK

Eigenwert und Eigenvektoren

Eigenwerte (EW) berechnen:

Lösungen von $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$

oder $\det(\lambda \cdot I_n - A) = 0$ (gibt dasselbe)

$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n)$ heisst charakteristisches Polynom

Eigenwerte = Nullstellen des char. Polynoms:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)^{a_n} = 0$$

a_i ist die **algebraische Multiplizität** vom Eigenwert λ_i

EWP 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Kubische Gleichung lösen:

- 1 Nullstelle erraten

- **Polynomdivision** \Rightarrow restl. NS via "Mitternachtsformel"

https://www.youtube.com/watch?v=K8K4_gowb4E

Beispiel "versteckte Quadr. Gl.:"

$$ax^6 + bx^3 + c = 0 \Rightarrow az^2 + bz + c = 0 \text{ mit } z = x^3$$

EWP 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Eigenvektor (EV) v zum EW λ :

Erfüllt: $Av = \lambda v$ ($v \neq 0$)

Eigenraum $E_\lambda(A)$ aller Eigenvektoren berechnen:

$$(A - \lambda \cdot I_n)v = 0 \text{ lösen (homogenes LGS)}$$

(Basis)Vektoren vom Eigenraum $E_\lambda(A)$ sind EV.

$\dim(E_{\lambda_i}) =$ **geometrische Multiplizität** vom EW λ_i

und $1 \leq \text{geom. Multipl.} \leq \text{algebr. Multipl.}$

EWP 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Eine Matrix A ist diagonalisierbar, falls:

• A symmetrisch ist oder

• für jeden EW gilt:

algebraische Multiplizität = geometrische Multiplizität

Falls A diagonalisierbar ist, gibt es Matrizen S, D und S^{-1}

$$\text{mit } A = SDS^{-1}$$

EWP 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Matrix diagonalisieren falls A symmetrisch:

- $S =$ Orthonormalbasis (ONB) aus Eigenvektoren von A
 $= (v_1 \dots v_n)$

- da S eine Orthogonalmatrix ist gilt: $S^{-1} = S^T$

$$\Rightarrow A = SDS^T$$

mit $D =$ Eigenwerte in der Diagonalen

EWP 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Spektrum einer linearen Abbildung f_A :

Lineare Abbildung $f_A : V \rightarrow W$

(mit Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$)

Spektrum = Menge aller Eigenwerte

inkl. algebr. Multiplizität!

(d.h. Mehrfachauflistung)

$$\text{spec}(A) = \{\lambda_1 = \dots, \lambda_2 = \dots, \dots, \lambda_n = \dots\}$$

EWP 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

Quadratische Form:

$$\text{(Falls) } Q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j \Leftrightarrow Q_A(x) = \langle Ax, x \rangle$$

mit A symmetrisch ($A = A^T$)

$$\text{Beispiel: } Q(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 8x_2^2$$

$$\rightarrow Q(x) = \langle Ax, x \rangle \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 8 \end{pmatrix}$$

EWP 7

www.mathcourses.ch/mat141.html

Definition von EW und EV nutzen

Vorzeigeaufgabe: ETH Caspar So12 Aufgabe 3c)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

Cannas Zwischenprüfung HS13 Aufgabe 7:

Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$?

- (a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Lösung:

(d)

Cannas Zwischenprüfung HS14 - Aufgabe 9:

Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$?

- (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a)

ETH Caspar Wi13 Aufgabe 3d)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Angenommen, dass es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist. Bestimmen Sie dieses a und den Eigenwert λ .

Lösung:

$a = 1, \quad \lambda = 3$

ETH Caspar Wi15 Aufgabe 2f)

Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Finden Sie ein Paar (x, y) , so dass $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von C ist.

Lösung:

$(x_1, y_1) = (1, -1) \quad (x_2, y_2) = (1, 0)$

Eigenwerte / Eigenvektoren berechnen

Vorzeigaufgabe:

Gegeben ist die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 von C und bestimmen Sie ein Orthonormalsystem $\mathcal{B} = \{\underline{x}^1, \underline{x}^2\}$.

Übung FS15:

Bestimmen Sie die Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(Vielfaches von) $(1, 1)^T, (1, -1)^T$

Übung FS15:

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, Eigenwerte, Eigenvektoren und Orthonormalsystem von

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda + 14 \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7, \quad \underline{x}_1 = (-2, 1)^T, \underline{x}_2 = (-1, -2)^T \\ \text{ONS} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, -2) \right\}$$

ETH Caspar Wi17 Aufgabe 2c)

Die Matrix A sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenwert von A ist $\lambda_1 = 2$. Geben Sie die beiden anderen Eigenwerte von A an.

Lösung:

$\lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1$



MAT141 PVK

Eigenwertprobleme

Eigenwerte (EW) berechnen:

Lösungen von $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$

oder $\det(\lambda \cdot I_n - A) = 0$ (gibt dasselbe)

$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n)$ heisst charakteristisches Polynom

Eigenwerte = Nullstellen des char. Polynoms:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)^{a_n} = 0$$

a_i ist die **algebraische Multiplizität** vom Eigenwert λ_i

EWP 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Kubische Gleichung lösen:

- 1 Nullstelle erraten

- **Polynomdivision** \Rightarrow restl. NS via "Mitternachtsformel"

https://www.youtube.com/watch?v=K8K4_gowb4E

Beispiel "versteckte Quadr. Gl.:"

$$ax^6 + bx^3 + c = 0 \Rightarrow az^2 + bz + c = 0 \text{ mit } z = x^3$$

EWP 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Eigenvektor (EV) v zum EW λ :

Erfüllt: $Av = \lambda v$ ($v \neq 0$)

Eigenraum $E_\lambda(A)$ aller Eigenvektoren berechnen:

$$(A - \lambda \cdot I_n)v = 0 \text{ lösen (homogenes LGS)}$$

(Basis)Vektoren vom Eigenraum $E_\lambda(A)$ sind EV.

$\dim(E_{\lambda_i}) =$ **geometrische Multiplizität** vom EW λ_i

und $1 \leq \text{geom. Multipl.} \leq \text{algebr. Multipl.}$

EWP 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Eine Matrix A ist diagonalisierbar, falls:

• A symmetrisch ist oder

• für jeden EW gilt:

algebraische Multiplizität = geometrische Multiplizität

Falls A diagonalisierbar ist, gibt es Matrizen S, D und S^{-1}

$$\text{mit } A = SDS^{-1}$$

EWP 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Matrix diagonalisieren falls A symmetrisch:

- $S =$ Orthonormalbasis (ONB) aus Eigenvektoren von A
 $= (v_1 \dots v_n)$

- da S eine Orthogonalmatrix ist gilt: $S^{-1} = S^T$

$$\Rightarrow A = SDS^T$$

mit $D =$ Eigenwerte in der Diagonalen

EWP 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Spektrum einer linearen Abbildung f_A :

Lineare Abbildung $f_A : V \rightarrow W$

(mit Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$)

Spektrum = Menge aller Eigenwerte

inkl. algebr. Multiplizität!

(d.h. Mehrfachauflistung)

$$\text{spec}(A) = \{\lambda_1 = \dots, \lambda_2 = \dots, \dots, \lambda_n = \dots\}$$

EWP 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

Quadratische Form:

$$\text{(Falls) } Q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j \Leftrightarrow Q_A(x) = \langle Ax, x \rangle$$

mit A symmetrisch ($A = A^T$)

$$\text{Beispiel: } Q(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 8x_2^2$$

$$\rightarrow Q(x) = \langle Ax, x \rangle \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 8 \end{pmatrix}$$

EWP 7

www.mathcourses.ch/mat141.html

Eigenwertprobleme

Vorzeigeaufgaben:

Berechne die Eigenwerte sowie deren algebraischen Vielfachheiten und Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Ist die Matrix diagonalisierbar?}$$

Ist folgende Matrix B diagonalisierbar? Falls ja, wieso und bestimmen Sie eine ON-Basis, zu der B Diagonalform hat.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Berechnen Sie } B^{20}.$$

HS15 Probepfprüfung Aufgabe 3

Betrachte die 3 x 3 Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

i) Berechne die Eigenwerte von A.

ii) Bestimme eine orthonormierte Basis $[v]$ von \mathbb{R}^3 , bestehend aus Eigenvektoren von A.

Lösung:

i) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$
ii) $s = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

HS16 Probepfprüfung Aufgabe 3

Betrachten Sie die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Finden Sie die Eigenwerte von A sowie deren algebraische und geometrische Multiplizitäten.

b) Gibt es eine Basis von \mathbb{R}^3 , die aus Eigenvektoren von A besteht? Begründen Sie ihre Antwort.

c) Ist A invertierbar? Wenn ja, bestimmen Sie die Inverse.

Lösung:

a) EW: 1, 2, -1 jeweils mit algebr. und geometr. Multipl. 1

b) Ja, da algebr. und geom. Vielfachheit für jeden EW übereinstimmt.

c) Ja ($\det A = -2 \neq 0$), $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

HS15 Uebungen Serie 9 Aufgabe 3

i) Bestimme die Eigenwerte und dazugehörigen Eigenvektoren von $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Finde eine Basis $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}]$ von \mathbb{C}^2 so dass $(T_A)_{[v] \rightarrow [v]}$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösung:

i) $1 \pm 2i \quad [v] = [(i, 1)^T, (-i, 1)^T]$



MAT141 PVK

Prüfe ob / Zeige dass

positive-, negativ- und indefinit:

Eine symmetrische Matrix A ist:

- positiv definit, falls alle EW $\lambda_i > 0$ (d.h. $Q(x) > 0 \forall x$)
- positiv semidefinit falls alle $\lambda_i \geq 0$ (d.h. $Q(x) \geq 0 \forall x$)
- negativ definit, falls alle EW $\lambda_i < 0$ (d.h. $Q(x) < 0 \forall x$)
- negativ semidefinit falls alle $\lambda_i \leq 0$ (d.h. $Q(x) \leq 0 \forall x$)
- indefinit, falls A sowohl pos. wie auch neg. λ_i hat

Alternativ: via (Determinanten der) **Hauptminoren**

Prüfen 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Hauptminoren zur Bestimmung der Definitheit

Eine symmetrische Matrix A ist:

positiv definit \Leftrightarrow alle Hauptminoren $\det(A^{(k)}) > 0 \quad 1 \leq k \leq n$

negativ definit $\Leftrightarrow \det(A^{(k)}) < 0$ für alle k ungerade

$\det(A^{(k)}) > 0$ für alle k gerade

$$\text{Bsp. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad A^{(1)} \quad A^{(2)} \quad A^{(3)} = A$$

Prüfen 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Orthogonale (= unitäre) Matrix:

Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist **orthogonal** $\Leftrightarrow A^T = A^{-1}$

$$\text{prüfe: } A^T A = \text{Id}_n = A A^T \quad \Rightarrow \quad \det(A) \in \{-1, 1\}$$

A orthogonale Matrix \Leftrightarrow Spaltenvektoren bilden eine ONB

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist **unitär** $\Leftrightarrow \bar{A}^T = A^{-1}$,

d.h. $\bar{A}^T A = \text{Id} = A \bar{A}^T \Leftrightarrow$ Vektoren bilden ONB

Prüfen 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Orthogonale (= unitäre) Matrix überprüfen:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonal, falls: $A^T A = \text{Id}$ oder

Spaltenvektoren eine orthonormale Basis (ONB) bilden:

- orthogonal: $\langle a^{(i)}, a^{(j)} \rangle = 0 \quad 1 \leq i \neq j \leq n$

- Länge 1: $\|a^{(i)}\| = \sqrt{\langle a^{(i)}, a^{(i)} \rangle} = 1 \quad 1 \leq i \leq n$

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist unitär, falls $\bar{A}^T A = \text{Id}$ oder Vektoren = ONB

Aufpassen im komplexen! $\langle v, w \rangle = v_1 \cdot \bar{w}_1 + \dots + v_n \cdot \bar{w}_n$

$$\langle (1+i), (1+i) \rangle = (1+i) \cdot \overline{(1+i)} = (1+i) \cdot (1-i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$$

Prüfen 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

symmetrisch / hermitisch:

A ist symmetrisch, falls gilt: $A^T = A$

A ist hermitisch, falls gilt: $\bar{A}^T = A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = A, \quad \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \neq A$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \neq B, \quad \bar{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{C}^T = C^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = C$$

A symmetrisch, B hermitisch, C symmetrisch und hermitisch

Prüfen 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Überprüfen ob eine Funktion linear ist:

Eine Funktion mit Abbildungsmatrix T ist linear, falls gilt:

$$T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$$

Untervektorraum (subspace) prüfen:

W ist ein Untervektorraum, falls

- $0 \in W$ ($0 \notin W \rightarrow$ Gegenbeispiel dass W kein UVR ist)
- $\lambda \cdot a + b \in W \quad \forall a, b \in W, \lambda \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C})

Zeigen 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Inneres Produkt (Skalarprodukt) prüfen:

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Inneres Produkt, falls $\forall u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(IP1) symmetrisch: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

(IP2) bilinear: $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

$$\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

(IP3) positiv definit: $\langle u, u \rangle > 0, \quad \forall u \neq 0$

$$\text{und } \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Zeigen 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Inneres Produkt eines komplexen VR prüfen:

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Inneres Produkt, falls gilt:

(IP1) $_{\mathbb{C}}$ hermitisch: $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}, \quad \forall v, w \in V$

(IP2) $_{\mathbb{C}}$ linear im ersten Argument: $\forall v, w, u \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\langle \alpha v + \beta w, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle + \beta \langle w, u \rangle$$

(IP3) $_{\mathbb{C}}$ positiv definit: $\langle v, v \rangle > 0, \quad \forall v \neq 0$

Aufpassen bei komplexem Skalarprodukt:

zweites Argument / Faktor ist immer komplex konjugiert!

Zeigen 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Prüfe ob / Zeige dass

Vorzeigeaufgaben:

Bestimme für die folgenden quadratischen Formen Q die symmetrische Matrix, so dass $Q(x) = \langle x, Ax \rangle \forall x \in \mathbb{R}^2$.
 $Q(x, y) = 2(x + y)^2 - 2xy$. Ist die Quadratische Form positiv (semi)definit, negativ (semi)definit, oder indefinit?

Vorzeigeaufgabe:

Gegeben sei die Abbildung $T : \mathbb{R}_4[x] \rightarrow \mathbb{R}_4[x]$ mit $T(f) := f'' - 2f' + 3f^{(iv)} \cdot x$ für $f \in \mathbb{R}_4[x]$.
Zeigen Sie, dass T eine lineare Abbildung ist.

HS15 Uebungen Serie 7 Aufgabe 2 Sei P_n der \mathbb{R} -Vektorraum aller Polynome in einer Variablen mit reellen Koeffizienten vom Grade höchstens n . Entscheide ob folgende Abbildungen linear sind.

i) $T : P_7 \rightarrow P_7, \quad p(t) \mapsto 2p''(t) + 2p'(t) + 5p(t).$ ii) $S : P_7 \rightarrow P_7, \quad p(t) \mapsto t^2 p''(t) + p(t).$

Lösung:

i) ja, T ist linear ii) Ja, S ist linear

MAT141 HS16 Serie 11 Aufgabe 2 (abgeändert):

Entscheide, ob folgende Quadratische Form positiv definit, negativ definit, oder indefinit ist:

(a) $Q(x, y) = (x + y)^2 + 4xy$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy - 4xz + z^2 - 2y^2 + 2yz$

Lösung:

(a) $\lambda_1 = -2 < 0, \lambda_2 = 4 > 0 \rightarrow$ indefinit
(b) $\lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = 0 \rightarrow$ positiv semi-definit
(d) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3 < 0, \lambda_3 = 3 > 0 \rightarrow$ indefinit

MAT141 HS18 Serie 13 Aufgabe 3:

Bestimme für folgende Matrizen, ob diese symmetrisch, orthogonal, hermitisch oder unitär sind.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

A : nur hermitisch, B : symmetrisch, hermitisch, orthogonal und unitär
 C : orthogonal und unitär D : symmetrisch und unitär

MAT141 HS17 Serie 8 Aufgabe 4:

Let $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ the map given by $B(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

1. Show that B is an inner product for \mathbb{R}^2 .

3. Compute the norm of the vectors $w^{(1)} = (1, 1)^T$ and $w^{(2)} = (1, -1)^T$ with respect to B .

Lösung:

1. zeige $B(y, x) = B(x, y), B(ax + bz, y) = aB(x, y) + bB(z, y), B(x, x) \geq 0 (= 0 \rightarrow x = 0)$
2. $\|w^{(1)}\|_B = \sqrt{6}, \|w^{(2)}\|_B = \sqrt{2}$



MAT141 PVK

DGL-Systeme

DGL-System $y' = Ay$ lösen:

- EW λ_1, λ_2 und zugehörige EV v_1, v_2 von A berechnen

- allgemeine Lösung: $y(t) = a \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot v_1 + b \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot v_2$

- Falls Anfangswertproblem:

Anfangswerte einsetzen und Gl.sys. nach a, b auflösen

DGL-Systeme 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Spezialfall: Falls A eine Nullzeile hat

• A^2, A^3 , etc. berechnen bis $A^n = \text{Nullmatrix}$

• Allg. Lösung von $y' = Ay \rightarrow y(t) = e^{At}y_0$

• benutze $e^{At} =: \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (A \cdot t)^j$

$$\Rightarrow y(t) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (A \cdot t)^j \right) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \left(Id + \frac{A^1 \cdot t^1}{1!} + \dots + \frac{A^n \cdot t^n}{n!} \right) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

DGL-Systeme 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Lineare DGL mit Anfangswert lösen:

$\dot{x} = a \cdot x$ mit Anfangswert $x(t_0) = c$

hat Lösung: $x(t) = c \cdot e^{a \cdot (t-t_0)}$

• Beispiel: $\dot{x} = 2x$ mit Anfangswert $x(1) = (4 + i)$

\Rightarrow Lösung $x(t) = (4 + i) \cdot e^{2(t-1)}$

DGL-Systeme 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Falls DGL-System komplexe Eigenwerte hat:

- Nur $\lambda_1 = a + i \cdot b$ benutzen und v_1 zu λ_1 ausrechnen

- betrachte $e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 = e^{at} \cdot e^{i \cdot bt} \cdot v_1$

- Euler's Formel anwenden: $e^{\pm i \cdot bt} = (\cos(bt) \pm i \cdot \sin(bt))$

- $(\cos(bt) + i \cdot \sin(bt)) \cdot v_1$ ausmultiplizieren

- sortieren zu 2 Vektoren: (Realteil) + $i \cdot$ (Imaginärteil)

\Rightarrow Lösung: $y(t) = c_1 \cdot e^{at} \cdot (\text{Realteil}) + c_2 \cdot e^{at} \cdot (\text{Imaginärteil})$

DGL-Systeme 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel DGL-System mit komplexen Eigenwerten:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm i \cdot 1$$

- $\lambda_1 = i = 0 + i \cdot 1$ ($a = 0, b = 1$)

$$- \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} +1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$- e^{(0+i \cdot 1)t} \cdot v_1 = e^{0 \cdot t} \cdot e^{i \cdot t} \cdot v_1 = \underbrace{e^0}_{=1} \cdot e^{i \cdot t} \cdot v_1 = e^{i \cdot t} \cdot v_1$$

DGL-Systeme 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel DGL-System mit komplexen Eigenwerten:

- $e^{i \cdot t} \cdot v_1 = (\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \cdot v_1$

- $(\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) + i \cdot \sin(t) \\ \cos(t) + i \cdot \sin(t) - i(\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \end{pmatrix}$$

- sortiert: $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$$

DGL-Systeme 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

DGL höherer Ordnung via $y' = Ay$:

Homogene DGL: $x'' = ax + bx'$

$$\text{Betrachte } y = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow y' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = Ay$$

lösen wie bei DGL-Systeme 1

DGL-Systeme 7

www.mathcourses.ch/mat141.html

Differentialgleichungssysteme

Vorzeigaufgabe: Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_1 + 2y_2, & y_1(0) &= 2, \\y_2' &= 2y_1 - y_2, & y_2(0) &= -1.\end{aligned}$$

HS15 Uebungen Serie 12 Aufgabe 1 Finde die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}\text{a) } y_1' &= y_1 + y_2 & \text{b) } y_1' &= 2y_1 + 4y_2 \\y_2' &= -2y_1 + 4y_2 & y_2' &= -y_1 - 3y_2\end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\text{a) } y(t) &= a \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \\ \text{b) } y(t) &= a \cdot e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

HS15 Uebungen Serie 12 Aufgabe 2 Löse die folgenden Anfangswertprobleme.

$$\begin{aligned}\text{a) } y_1' &= -y_1 + 2y_2, & y_1(0) &= 2, \\y_2' &= 2y_1 - y_2, & y_2(0) &= -1. \\ \\ \text{b) } y_1' &= 2y_1 - 6y_3, & y_1(0) &= 1, \\y_2' &= y_1 - 3y_3, & y_2(0) &= 0 \\y_3' &= y_2 - 2y_3, & y_3(0) &= -1.\end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\text{a) } &\begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^t \\ -\frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^t \end{pmatrix} & \text{b) } &\begin{pmatrix} 6e^t - 2e^{-t} - 3 \\ 3e^t - e^{-t} - 2 \\ e^t - e^{-t} - 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vorzeigaufgabe: Betrachte die ODE

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y'(t) = Ay(t)$.

HS21 Uebungen Sheet 13 Exercise 2

Consider the linear ODE

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Determine the general solution $y'(t) = Ay(t)$.



MAT141 PVK

Komplexe DGL-Systeme

(Euler's formula)

DGL-System $y' = Ay$ lösen:

- EW λ_1, λ_2 und zugehörige EV v_1, v_2 von A berechnen

- allgemeine Lösung: $y(t) = a \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot v_1 + b \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot v_2$

- Falls Anfangswertproblem:

Anfangswerte einsetzen und Gl.sys. nach a, b auflösen

DGL-Systeme 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Spezialfall: Falls A eine Nullzeile hat

• A^2, A^3 , etc. berechnen bis $A^n = \text{Nullmatrix}$

• Allg. Lösung von $y' = Ay \rightarrow y(t) = e^{At}y_0$

• benutze $e^{At} =: \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (A \cdot t)^j$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(t) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (A \cdot t)^j \right) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \left(Id + \frac{A^1 \cdot t^1}{1!} + \dots + \frac{A^n \cdot t^n}{n!} \right) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

DGL-Systeme 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Lineare DGL mit Anfangswert lösen:

$\dot{x} = a \cdot x$ mit Anfangswert $x(t_0) = c$

hat Lösung: $x(t) = c \cdot e^{a \cdot (t-t_0)}$

• Beispiel: $\dot{x} = 2x$ mit Anfangswert $x(1) = (4 + i)$

\Rightarrow Lösung $x(t) = (4 + i) \cdot e^{2(t-1)}$

DGL-Systeme 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Falls DGL-System komplexe Eigenwerte hat:

- Nur $\lambda_1 = a + i \cdot b$ benutzen und v_1 zu λ_1 ausrechnen

- betrachte $e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 = e^{at} \cdot e^{i \cdot bt} \cdot v_1$

- Euler's Formel anwenden: $e^{\pm i \cdot bt} = (\cos(bt) \pm i \cdot \sin(bt))$

- $(\cos(bt) + i \cdot \sin(bt)) \cdot v_1$ ausmultiplizieren

- sortieren zu 2 Vektoren: (Realteil) + $i \cdot$ (Imaginärteil)

\Rightarrow Lösung: $y(t) = c_1 \cdot e^{at} \cdot (\text{Realteil}) + c_2 \cdot e^{at} \cdot (\text{Imaginärteil})$

DGL-Systeme 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel DGL-System mit komplexen Eigenwerten:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm i \cdot 1$$

- $\lambda_1 = i = 0 + i \cdot 1$ ($a = 0, b = 1$)

$$- \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} +1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$- e^{(0+i \cdot 1)t} \cdot v_1 = e^{0 \cdot t} \cdot e^{i \cdot t} \cdot v_1 = \underbrace{e^0}_{=1} \cdot e^{i \cdot t} \cdot v_1 = e^{i \cdot t} \cdot v_1$$

DGL-Systeme 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel DGL-System mit komplexen Eigenwerten:

- $e^{i \cdot t} \cdot v_1 = (\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \cdot v_1$

- $(\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) + i \cdot \sin(t) \\ \cos(t) + i \cdot \sin(t) - i(\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \end{pmatrix}$$

- sortiert: $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$$

DGL-Systeme 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

DGL höherer Ordnung via $y' = Ay$:

Homogene DGL: $x'' = ax + bx'$

$$\text{Betrachte } y = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow y' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = Ay$$

lösen wie bei DGL-Systeme 1

DGL-Systeme 7

www.mathcourses.ch/mat141.html



MAT141 PVK

Zusatz: Inhomogene Differentialgleichungen



MAT141 PVK

Zusatz: DGL 2. Ordnung