MathCourses

www.mathcourses.ch/mat141.html

MAT141 PVK

Kurstag 1

provisorisch - werden noch fürs HS23 überarbeitet

Homepage / Webseite:

`www.mathcourses.ch/mat141.html`

MAT141 PVK

Determinante und Inverse

Wichtige Zusammenhänge:

Für eine quadratische $[x \times n]$ Matrix A gilt:

$\det(A) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ A ist invertierbar

$\Leftrightarrow$ A ist regulär $\Leftrightarrow r(A) = n$

$\Leftrightarrow$ Zeilen- und Spaltenvektoren von A

sind linear unabhängig

Einige Rechenregeln für Determinanten:

Für quadratische $[x \times n]$ Matrizen A, A^{-1}, B gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \rightarrow \quad \det(A^m) = \Big(\det(A)\Big)^m$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \qquad \det(A^T) = \det(A)$$

A eine $[nxn]$ Matrix $\rightarrow \det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

Determinante einer 2x2 Matrix

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definieren wir

$\det A = a \cdot d - c \cdot b$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 4 = 3 + 4 = 7$$

Determinante einer 3x3 Matrix

Regel von Sarrus:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. - \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Beispiel:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right. = 0 + 2 + 0 - 0 - 0 - (-4) = 6$$

Determinante mit Entwicklungssatz von Laplace:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$$

- Beispiel: Entwicklungssatz von Laplace:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (2) - 2 \cdot (-2) = 6$$

Inverse einer Matrix berechnen:

Inverse einer 2x2 Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse einer nxn Matrix:

$(A \mid I_n)$ umformen zu $(I_n \mid A^{-1})$

Gauss-Umformungen und Determinante:

- Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren:
  $\rightarrow$ Determinante bleibt gleich
  (analog bei Spalten)
- Vertauschen zweier Zeilen:
  $\rightarrow$ Determinante ändert das Vorzeichen!
- Multiplizieren einer Zeile mit λ:
  $\rightarrow$ Determinante wird $\cdot\lambda$ vergrössert!

Determinante und Inverse

Vorzeigeaufgaben:

Bestimmen Sie für welche $a \in \mathbb{R}$ die folgende Matrix invertierbar ist und berechnen Sie deren Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} a\cos(x) & -\sin(x) \\ a\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie ob folgende Matrix invertierbar ist und berechnen Sie falls möglich die Inverse.
Berechnen Sie $\det(2B)^{10}$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

HS15 Uebungen Serie 1 Aufgabe 4

Berechne die Determinante folgender Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & -a \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1-a^2 & a+a^2 \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

Lösung: $\det B = -a(1+a) \qquad \det D = 0$

HS15 Uebungen Serie 4 Aufgabe 4i)

Berechne die Determinante von $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{25}$

Lösung: i) $\det A = -1$

HS15 Uebungen Serie 3 Aufgabe 1

Bestimme, welche der folgenden Matrizen regulär sind und berechne deren Inverses.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Lösung: $\det A = -3 \rightarrow A$ regulär und $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2/3 & -4/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

$\det B = 0 \rightarrow$ nicht invertierbar.

Für einen gegebenen Winkel α betrachte man die Matrix M. Berechne die Inverse M^{-1}.

$$M = 7\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Lösung: $M^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix}$

MAT141 PVK

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel LGS lösen: 1. Erweiterte Matrix

Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrl} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{x_1 - 2x_2 + 3x_3}}^{A\cdot x}} & \overbrace{=b}^{} \\ x_1 & - x_2 & & = 1 \\ 2x_1 & - 2x_2 & + 3x_3 & = 5 \\ & - 3x_2 & + 9x_3 & = 0 \end{array}$$

$\Longrightarrow$ erweiterte Matrix $(A|b)$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \end{array}\right)$

LGS 1 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Beispiel: 2. Zeilenstufenform + 3. Gl. lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{|c|} \hline Z2 - 2 \cdot Z1 \\ \hline Z3 : (-3) \\ \hline \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{|c|} \hline Z2 \leftrightarrow Z3 \\ \hline Z3 + Z2 \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{|c|} \hline Z1 + Z2 \\ \hline Z2 \leftrightarrow Z3 \\ \hline Z3 : (-3) \\ \hline \end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)}_{r(A)=3 \text{ "pivots"}} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & 4 \\ x_2 & = & 3 \\ x_3 & = & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow L = \{(4,3,1)\}$ mit $\dim(L) = n - r = 3 - 3 = 0$

LGS 2 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Dimension der Lösungsmenge eines LGS

dim L = n − r = "Anzahl Variablen - Anzahl pivots"

$\widehat{=}$ **Anzahl frei wählbarer Parameter**

L = Lösungsmenge des LGS $Ax = b$

n = Anzahl Variablen = Anzahl Spalten von A

$r = r(A)$ = Rang der Matrix A

= Anzahl Pivots der Zeilenstufenform

(Row Echelon Form)

LGS 3 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Beispiel: Anzahl Lösungen eines LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & u & v \end{array}\right)$$

hat genau eine Lösung, falls $u \neq 0$, $v \in \mathbb{R}$

hat keine Lösung, falls $u = 0$ und $v \neq 0$

hat unendlich viele Lösungen, falls $u = 0$ und $v = 0$

LGS 4 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Dimension der Lösungsmenge: 3 Fälle

$\dim(\mathbf{L}) = \mathbf{n} - \mathbf{r}(\mathbf{A})$ L = Lösungsmenge eines LGS Ax=b

- **Fall 1: det(A) ≠ 0 ⇔ A hat vollen Rang**

  $\det(A) \neq 0 \leftrightarrow r(A) = n$

  $\dim(L) = n - n = 0$

  (geometrische Interpretation: $L \,\widehat{=}\,$ Punkt)

  $\Rightarrow$ ***L* hat genau 1 Lösung**

LGS 5 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Dimension der Lösungsmenge: 3 Fälle (Forts.)

- **Fall 2:** $\det(A) = 0$ und **LGS unlösbar!**

  Das LGS hat eine Zeile: $0\ 0\ 0 \mid \neq 0$

  $\Rightarrow$ ***L* hat keine Lösung**

- **Fall 3: det(A)= 0 und LGS lösbar** $r(A) < n$

  $\dim(L) = n - r(A) > 0$

  $\dim(L) = 1 \rightarrow L \,\widehat{=}\,$ Gerade $\dim(L) = 2 \rightarrow L \,\widehat{=}\,$ Ebene

  $\Rightarrow$ ***L* hat unendlich viele Lösungen**

LGS 6 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Cramersche Regel (um LGS zu lösen):

Ist A eine reguläre $[nxn]$ Matrix, so hat das LGS $Ax = b$ eindeutige Lösungen $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ mit

$$\hat{x}_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

A_i : i-te Spalte von A durch b ersetzen

LGS 7 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Beispiel Cramersche Regel:

LGS $(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow \hat{x}_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{3 \cdot 1 - 0 \cdot 1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \hat{x}_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

LGS 8 *www.mathcourses.ch/mat141.html*

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Vorzeigeaufgabe:

Bringen Sie folgendes lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 & = & -5 \end{array}$$

mittels des Gausschen Eliminationsverfahren in Zeilen-Stufenform (Row Echelon Form) und bestimme danach die Menge aller Lösungen.

HS15 Uebungen Serie 6 Aufgabe 3

Bringen Sie das linearen Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -2 \end{array}$$

mittels des Gausschen Eliminationsverfahren in Zeilen-Stufenform (Row Echelon Form) und bestimme danach die Menge aller Lösungen.

Lösung: $\mathbb{L} = \{(2 + 11/5x_3, -2 - 18/5x_3, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$

HS15 Uebungen Serie 1 Aufgabe 1+2

Bringe die folgenden linearen Gleichungssysteme mittels des Gausschen Eliminationsverfahren in Zeilen-Stufenform (Row Echelon Form) und bestimme danach die Menge aller Lösungen.

i)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -4 \end{array}$$

iii)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 8 \\ x_1 & - & 5x_2 & + & x_4 & & & = & 5 \end{array}$$

iv)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & - & 8x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \end{array}$$

Lösung: i) $L = \{(-4, 3, -2)\}$ iii) $L = \{(5 - x_4, 0, -2, x_4), x_4 \in \mathbb{R}\}$

iv) $L = \{(1 + 2/7 \cdot x_3, 3/7 \cdot x_3, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$

Vorzeigeaufgabe:

Für welche Werte von a und b hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} ax_1 & + & (1.5a+2)x_2 & = & 3+b \\ -2x_1 & + & (a+1)x_2 & = & 5 \end{array}$$

(i) genau eine (ii) keine (iii) unendlich viele Lösungen?

HS15 Uebungen Serie 1 Aufgabe 3

Betrachte das lineare Gleichungssystem dessen erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben ist durch

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{array}\right].$$

i) Für welche Werte von a und b in $\mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen?

ii) Für welche Werte von a und b in $\mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem keine Lösungen?

Lösung: i) $a = 5, b = 4$ ii) $a = 5, b \neq 4$

Für einen Parameter $s \in \mathbb{R}$ betrachten wir das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ & & & & & & (1+s)x_4 & = & -6 \end{array}$$

(i) Bestimmen Sie jeweils <u>alle</u> Werte des Parameters s, für die das LGS

a) keine Lösung hat

b) eine Lösungsmenge der Dimension 2 hat,

c) eine Lösungsmenge der Dimension 1 hat.

(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses LGS für $s = 2$.

Lösung: i) a) $s = -1$ b) nicht möglich c) $s \neq -1$ ii) $\mathbb{L} = \{(3 - 3x_3, 1 - 2x_3, x_3, -2),\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ (1 Vble wählbar $\rightarrow \dim(\mathbb{L}) = 1$)

Gegeben ist das inhomogene lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_1 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & - & x_4 & - & x_3 & + & x_2 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & ux_3 & + & 6x_4 & = & v \end{array}$$

wobei u und v reelle Parameter sind. Bestimmen Sie alle Parameterpaare (u, v), für die dieses LGS

(i) unlösbar ist (ii) genau eine Lösung hat, (iii) eine Lösungsmenge der Dimension 1 hat,

(iv) eine Lösungsmenge der Dimension 2 hat.

Lösung: i) $u = -6, v \neq 4$ ii) nicht möglich iii) $u \neq -6, v \in \mathbb{R}$ iv) $u = -6, v = 4$

MAT141 PVK

Linear unabhängig & Basis

Basis

Vektorraum mit $\dim(V) = n$.

Eine Basis besteht aus

- genau n linear unabhängigen Vektoren

  d.h. $\det(v^{(1)}\ v^{(2)}\ \ldots\ v^{(n)}) \neq 0$

Lineare Unabhängigkeit:

$v_1, \ldots, v_k$ sind linear unabhängig, falls

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_k \cdot v_k = 0}_{\text{LGS } A\lambda = 0} \overset{!}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0 \qquad (\Rightarrow \text{kern}(A) = 0)$$

Linear abh.: falls das LGS unendlich viele Lösungen hat

Lineare Unabhängigkeit überprüfen:

- n Vektoren $\in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \det\begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} \neq 0$
- sonst LGS lösen oder von Auge vergleichen (bei 2 Vektoren)

Basis (des $\mathbb{R}^n$):

1) n linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ $(\in \mathbb{R}^n)$

orthogonale Basis:

1) n linear unabhängige Vektoren
2) $v_1, \ldots, v_n$ sind paarweise orthogonal (Skalarprodukt $= 0$)

orthonormale Basis (ONB):

1) n linear unabhängige Vektoren
2) $v_1, \ldots, v_n$ sind paarweise orthogonal (Skalarprodukt $= 0$)
3) alle Vektoren haben Länge 1 (= normiert)

Euklidisches **Skalarprodukt:**

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i \qquad \langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \overline{w_i} \qquad (v, w \in \mathbb{C})$$

- v und w sind orthogonal $\Leftrightarrow$ $\langle v, w\rangle = 0$
- Länge von $v = ||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ normiert: $\dfrac{v}{||v||}$
- $\cos(\varphi) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{||v||\ ||w||}$ (Winkel $0 \leq \varphi \leq \pi$ zwischen v und w)

Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt:

Basis $v_1, \ldots, v_n$ gegeben, ist aber nicht orthogonal:

$w_1 = v_1$

$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$

$\vdots$

$w_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle w_i, v_j\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} w_i \qquad$ für $j = 2, \ldots n$

Vektoren normieren: $w_i \cdot \frac{1}{||w_i||} \quad \longrightarrow$ ONB

Beispiel aus alten Übungen:

$$\{v_1, v_2\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\},$$

To find an orthonormal basis of this eigenspace, we set

$$w_1 = 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

and find $w_2\prime$ such that $w_2\prime = v_1 + \lambda v_2$ and $\langle v_1, w_2\prime\rangle = 0$. This gives us
$0 = \langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\rangle = 1 + \lambda - (-1) = 2 + \lambda$, so $\lambda = -2$
and $w_2\prime = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$. We normalise this vector and get

$$w_2 = 1/\sqrt{6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

Basiswechsel / Basiswechselmatrix:

Koordinaten eines Vektors sind (bis jetzt immer) gegeben für Standardbasis $[e]$ (=Einheitsvektoren)

im $\mathbb{R}^3$: $[e] = [(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T]$

Neue Basis $[v] = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ gegeben

$\to$ Koordinaten desselben Vektors für neue Basis $[v]$ berechnen(!)

via **Basiswechselmatrix:** $Id_{[\text{von alter Basis}]\to[\text{zu neuer Basis}]}$

- $Id_{[v]\to[e]} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$ (Matrix bestehend aus neuen Basisvektoren)

Vektor in neuer Basis $[v]$ **darstellen:**

Koordinaten von w gegeben (für Standardbasis $[e]$)

w' = Koordinaten von w für neue Basis $[v]$:

1) $Id_{[v]\to[e]}$ invertieren (für andere Richtung)

$\to Id_{[e]\to[v]} = \left(Id_{[v]\to[e]}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix}^{-1}$

Falls $[v]$ eine ONB ist: $\left(Id_{[v]\to[e]}\right)^{-1} = \left(Id_{[v]\to[e]}\right)^{T}$

2) Koordinaten w' für neue Basis $[v]$ berechnen

$w' = Id_{[e]\to[v]} \cdot w$

Linear Unabhängig und Basis

Vorzeigeaufgabe: Bilden folgende Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$?
Lässt sich der Vektor $b = (5, -2, 2)^T$ als Linearkombination von $a^{(1)}, a^{(2)}$ und $a^{(3)}$ darstellen?

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

HS15 Uebungen Serie 3 Aufgabe 3

i) Entscheide, ob $a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

ii) Wenn möglich, stelle $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $a^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dar.

Lösung: i) nein, linear unabhängig ii) $7 \cdot a^{(1)} - 2 \cdot a^{(2)} = b$

HS15 Uebungen Serie 4 Aufgabe 1 Entscheide, ob folgende Vektoren in $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind oder nicht

ii) $a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

i) $a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Lösung: ii) lin. unabh. (det $\neq 0$ oder Gauss) i) linear unabhängig

HS16 Probeprüfung Aufgabe 1 Betrachten Sie die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}.$$

a) Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist $[v] = \left[v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\right]$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

b) Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist $[v] = \left[v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\right]$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$?

c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $[v] = \left[v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\right]$ eine Orthogonalbasis ist (vgl. **(b)**).

Skalieren Sie die Vektoren $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ so, dass die skalierten Vektoren eine ON-Basis bilden, und bestimmen Sie die Koordinaten von $u = (1, 1, 1)^T$ bezüglich dieser ON-Basis.

d) Seien $a = 1$ und $b = 0$. Bestimmen Sie den nicht-orientierten Winkel zwischen $v^{(2)}$ und $v^{(3)}$.

Lösung: a) $a \in \mathbb{R}, b \neq 1$ b) $a = 0, b = -1$

c) $1/\sqrt{3} \cdot v^{(1)}, 1/\sqrt{6} \cdot v^{(2)}, 1/\sqrt{2} \cdot v^{(3)}$ Koo.: $(1/\sqrt{3}, 4/\sqrt{6}, 0)$

d) $\arccos(\sqrt{3}/2)$ $(= \pi/6)$

HS09 Uebungen Serie 12 Aufgabe 3

Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch $v_1 = (1, 0, -3, 0)^T$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)^T$ und $v_3 = (3, 2, -3, 0)^T$.

Wie gross ist die Dimension des Untervektorraums welcher von v_1, v_2 und v_3 erzeugt wird?

Lösung: 2

HS17 Uebungen Serie 7 Aufgabe 1

Entscheide, ob folgende Vektoren in $\mathbb{C}^2$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$ bilden:

$$\text{(a)} \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} -2+2i \\ -2-2i \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} -i \\ 2+2i \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) $\det(v^{(1)}, v^{(2)}) = 0 \to$ linear abhängig $\Rightarrow$ keine Basis

(b) $\det(v^{(1)}, v^{(2)}) = 1 + 6i \neq 0 \to$ linear unabhängig $\Rightarrow$ Basis

Basiswechsel

Vorzeigeaufgabe:

Gegeben die Basen $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ von $\mathbb{R}^3$ und $[w] = [w^{(1)}, w^{(2)}]$ von $\mathbb{R}^2$ mit

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad w^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad w^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Basiswechselmatrizen $\mathrm{Id}_{[v]\to[e]}$, $\mathrm{Id}_{[w]\to[e]}$ und $\mathrm{Id}_{[e]\to[w]}$.

Bestimme die Koordinatendarstellung von $x = (-1, 4)^T$ in der Basis $[w]$.

HS15 Ue 8 Aufgabe 2 Sei $< \cdot, \cdot >$ das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ und $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ folgende Vektoren

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \qquad v^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad v^{(3)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

i) Verifiziere, dass $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.

ii) Bestimme $\mathrm{Id}_{[v]\to[e]}$ und verifiziere, dass $\mathrm{Id}_{[v]\to[e]}$ und $\mathrm{Id}_{[e]\to[v]}$ orthogonal sind. Thema Kurstag 2 (Lernkärtchen "Prüfen 3")

iii) Berechne die Koordinaten von $x = (1, 2, 1)^T$ und $y = (1, 0, 1)^T$ als Linearkombination von $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$.

Lösung:

i) $< v^{(i)}, v^{(j)} >= \delta_{ij}$ ii) $\mathrm{Id}_{[v]\to[e]} = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$

ist orgthogonal: $\mathrm{Id}_{[v]\to[e]} \cdot \mathrm{Id}_{[e]\to[v]} = \mathrm{Id}_{[v]\to[e]} \cdot (\mathrm{Id}_{[v]\to[e]})^T = I_3$

iii) $\mathrm{Id}_{[e]\to[v]} \cdot x = (-4/\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2/\sqrt{3})$ und $\mathrm{Id}_{[e]\to[v]} \cdot y = (0, \sqrt{2}, 0)$

MAT141 PVK

Basiswechsel

Basis

Vektorraum mit $\dim(V) = n$.

Eine Basis besteht aus

- genau n linear unabhängigen Vektoren

  d.h. $\det(v^{(1)}\ v^{(2)}\ \dots\ v^{(n)}) \neq 0$

Lineare Unabhängigkeit:

$v_1, \dots, v_k$ sind linear unabhängig, falls

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_k \cdot v_k = 0}_{\text{LGS } A\lambda = 0} \stackrel{!}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$$

$(\Rightarrow \text{kern}(A) = 0)$

Linear abh.: falls das LGS unendlich viele Lösungen hat

Lineare Unabhängigkeit überprüfen:

- n Vektoren $\in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \det(v_1\ \dots\ v_n) \neq 0$

- sonst LGS lösen oder von Auge vergleichen (bei 2 Vektoren)

Basis (des $\mathbb{R}^n$):

1) n linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n$ $(\in \mathbb{R}^n)$

orthogonale Basis:

1) n linear unabhängige Vektoren

2) $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise orthogonal (Skalarprodukt $= 0$)

orthonormale Basis (ONB):

1) n linear unabhängige Vektoren

2) $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise orthogonal (Skalarprodukt $= 0$)

3) alle Vektoren haben Länge 1 (= normiert)

Euklidisches Skalarprodukt:

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i \qquad \langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \overline{w_i} \quad (v, w \in \mathbb{C})$$

- v und w sind orthogonal $\Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0$

- Länge von $v = ||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ normiert: $\frac{v}{||v||}$

- $\cos(\varphi) = \frac{\langle v, w\rangle}{||v||\ ||w||}$ (Winkel $0 \leq \varphi \leq \pi$ zwischen v und w)

Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt:

Basis $v_1, \dots, v_n$ gegeben, ist aber nicht orthogonal:

$w_1 = v_1$

$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$

$\vdots$

$w_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle w_i, v_j\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle} w_i \qquad$ für $j = 2, \dots n$

Vektoren normieren: $w_i \cdot \frac{1}{||w_i||} \quad \longrightarrow$ ONB

Beispiel aus alten Übungen:

$$\{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

To find an orthonormal basis of this eigenspace, we set

$$w_1 = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

and find $w_2\prime$ such that $w_2\prime = v_1 + \lambda v_2$ and $\langle v_1, w_2\prime\rangle = 0$. This gives us

$0 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = 1 + \lambda - (-1) = 2 + \lambda$, so $\lambda = -2$

and $w_2\prime = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. We normalise this vector and get

$$w_2 = 1/\sqrt{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Basiswechsel / Basiswechselmatrix:

Koordinaten eines Vektors sind (bis jetzt immer) gegeben für Standardbasis $[e]$ (=Einheitsvektoren)

im $\mathbb{R}^3$: $[e] = [(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T]$

Neue Basis $[v] = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ gegeben

$\to$ Koordinaten desselben Vektors für neue Basis $[v]$ berechnen(!)

via **Basiswechselmatrix:** $Id_{[\text{von alter Basis}] \to [\text{zu neuer Basis}]}$

- $Id_{[v]\to[e]} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$ (Matrix bestehend aus neuen Basisvektoren)

Vektor in neuer Basis $[v]$ darstellen:

Koordinaten von w gegeben (für Standardbasis $[e]$)

w' = Koordinaten von w für neue Basis $[v]$:

1) $Id_{[v]\to[e]}$ invertieren (für andere Richtung)

$\to Id_{[e]\to[v]} = \left(Id_{[v]\to[e]}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}^{-1}$

Falls $[v]$ eine ONB ist: $\left(Id_{[v]\to[e]}\right)^{-1} = \left(Id_{[v]\to[e]}\right)^{T}$

2) Koordinaten w' für neue Basis $[v]$ berechnen

$w' = Id_{[e]\to[v]} \cdot w$

HS09 Uebungen Serie 12 Aufgabe 3

Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch $v_1 = (1, 0, -3, 0)^T$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)^T$ und $v_3 = (3, 2, -3, 0)^T$.

Wie gross ist die Dimension des Untervektorraums welcher von v_1, v_2 und v_3 erzeugt wird?

Lösung: 2

HS17 Uebungen Serie 7 Aufgabe 1

Entscheide, ob folgende Vektoren in $\mathbb{C}^2$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$ bilden:

$$\text{(a)}\quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} -2+2i \\ -2-2i \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} -i \\ 2+2i \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) $\det(v^{(1)}, v^{(2)}) = 0 \to$ linear abhängig $\Rightarrow$ keine Basis

(b) $\det(v^{(1)}, v^{(2)}) = 1 + 6i \neq 0 \to$ linear unabhängig $\Rightarrow$ Basis

Basiswechsel

Vorzeigeaufgabe:

Gegeben die Basen $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ von $\mathbb{R}^3$ und $[w] = [w^{(1)}, w^{(2)}]$ von $\mathbb{R}^2$ mit

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad w^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad w^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Basiswechselmatrizen $\mathrm{Id}_{[v]\to[e]}$, $\mathrm{Id}_{[w]\to[e]}$ und $\mathrm{Id}_{[e]\to[w]}$.

Bestimme die Koordinatendarstellung von $x = (-1, 4)^T$ in der Basis $[w]$.

HS15 Ue 8 Aufgabe 2 Sei $< \cdot, \cdot >$ das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ und $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ folgende Vektoren

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \qquad v^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad v^{(3)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

i) Verifiziere, dass $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.

ii) Bestimme $\mathrm{Id}_{[v]\to[e]}$ und verifiziere, dass $\mathrm{Id}_{[v]\to[e]}$ und $\mathrm{Id}_{[e]\to[v]}$ orthogonal sind. Thema Kurstag 2 (Lernkärtchen "Prüfen 3")

iii) Berechne die Koordinaten von $x = (1, 2, 1)^T$ und $y = (1, 0, 1)^T$ als Linearkombination von $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$.

Lösung:

i) $< v^{(i)}, v^{(j)} >= \delta_{ij}$ ii) $\mathrm{Id}_{[v]\to[e]} = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$

ist orgthogonal: $\mathrm{Id}_{[v]\to[e]} \cdot \mathrm{Id}_{[e]\to[v]} = \mathrm{Id}_{[v]\to[e]} \cdot (\mathrm{Id}_{[v]\to[e]})^T = I_3$

iii) $\mathrm{Id}_{[e]\to[v]} \cdot x = (-4/\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2/\sqrt{3})$ und $\mathrm{Id}_{[e]\to[v]} \cdot y = (0, \sqrt{2}, 0)$

MAT141 PVK

Lineare Abbildungen

Abbildungsmatrix (für Standardbasis [e]) aufstellen:

Abbildungsvorschrift $T : (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$
(ist in der Aufgabenstellung) vorgegeben:

$$\big(\underbrace{\text{Abbildungsmatrix}}_{T_{[e]\to[e]}}\big) \cdot \big(\text{urspr. Vektor}\big) = \big(\text{neuer Vektor}\big)$$

$$\begin{pmatrix} \text{ablesen / ergänzen} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (gegeben) \\ (gegeben) \\ (gegeben) \\ (gegeben) \end{pmatrix}$$

Abbildungsmatrix für andere Basen angeben:

Gegeben: Abbildungsmatrix $(= T_{[e]\to[e]})$

$$T_{[v]\to[w]} = Id_{[e]\to[w]} \cdot T_{[e]\to[e]} \cdot Id_{[v]\to[e]}$$

wobei $Id_{[v]\to[e]} = \begin{pmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} & \dots & v^{(n)} \end{pmatrix}$

und $Id_{[e]\to[v]} = \left(Id_{[v]\to[e]}\right)^{-1}$ (invertieren)

falls $[w]$ eine ONB ist gilt: $Id_{[e]\to[w]} = \left(Id_{[w]\to[e]}\right)^T$

(Vorzeige-)Aufgaben dazu auf Homepage!

Abbildungsmatrix für Polynom-Vektorraum $\mathbb{P}_n$:

Standard-Basis für $\mathbb{P}_n$: $\begin{pmatrix} x^n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^{n-1} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) Vektor f & Bildvektor $T(f)$ in geg. Basis ausdrücken

2) Abbildungsmatrix via Matrizenmultiplikation aufstellen:

$$T \cdot f = T(f)$$

Beispiel Abbildungsmatrix für $\mathbb{P}_n$:

$f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d \in \mathbb{P}_3$

$T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2, \quad T(f) = 3az^2 + 2bz + c$

1) Koeff. für Standardbasis: $f(z) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad T(f) = \begin{pmatrix} 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix}$

2) Abb.matrix: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix}$

Bild und Kern einer linearen Abbildung:

Lineare Abbildung $f : V \to W$ (mit Abbildungsmatrix A)

$\text{Bild}(f) = \text{range}(f) := \{f(x) \mid x \in V\} \subset W$

$\text{Kern}(f) = \text{kernel}(f) = \text{Null}(f) := \{x \in V \mid f(x) = 0\} \subset V$

Hinweis: beide sind Untervektorräume(!) mit

Dimension vom Bild $= \text{r}(A)$ Dimension vom Kern $= n - r(\text{A})$

allg. gilt: $\dim(\text{Bild}) + \dim(\text{Kern}) = n$

Lineare Abbildungen

Vorzeigeaufgabe: Gegeben die Basen $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ von $\mathbb{R}^3$ und $[w] = [w^{(1)}, w^{(2)}]$ von $\mathbb{R}^2$ mit

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad w^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad w^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die lineare Abbildung T sei gegeben durch $\quad T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 - 3x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$

i) Bestimme die Matrixdarstellung $T_{[e]\to[e]}$ bezüglich der Standardbasis $[e]$.

ii) Bestimme die Basiswechselmatrizen $\mathrm{Id}_{[v]\to[e]}$, $\mathrm{Id}_{[w]\to[e]}$ und $\mathrm{Id}_{[e]\to[w]}$.

iii) Bestimme die Matrixdarstellung $T_{[v]\to[w]}$.

iv) Sei x bezüglich der Standardbasis $[e]$ gegeben durch $x = (1, -1, 2)^T$. Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung x' bezüglich der Basis $[v]$ von x. Berechnen Sie $T(x)$ in beiden Basisdarstellungen als $T_{[e]\to[e]}x$ und $T_{[v]\to[w]}x'$.

HS15 Uebungen Serie 7 Aufgabe 3 Betrachte die folgenden Basen von $\mathbb{R}^2$

$$[e] = [e^{(1)}, e^{(2)}], \qquad [v] = [e^{(2)}, e^{(1)}], \qquad [w] = [w^{(1)}, w^{(2)}], \quad \text{wobei } w^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit Matrixdarstellung $f_{[e]\to[e]} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

i) Bestimme $\mathrm{Id}_{[v]\to[e]}$ und $\mathrm{Id}_{[e]\to[v]}$.

ii) Bestimme $f_{[v]\to[e]}$ und $f_{[v]\to[v]}$.

iii) Bestimme $f_{[w]\to[w]}$.

Lösung: i) $\mathrm{Id}_{[v]\to[e]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Id}_{[e]\to[v]}$ ii) $f_{[v]\to[e]} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ und $f_{[v]\to[v]} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ iii) $f_{[w]\to[w]} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

HS15 Uebung 7 Aufgabe 4 Betrachte die Basis $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ von $\mathbb{R}^3$ und $[w] = [w^{(1)}, w^{(2)}]$ von $\mathbb{R}^2$ mit

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad w^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Berechne die Matrixdarstellung von $T_{[v]\to[w]}$ von

i) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$ ii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$

Lösung: i) $T_{[v]\to[w]} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ii) $T_{[v]\to[w]} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

MAT141 PVK

Komplexe Zahlen

Fundamentaler Satz der Algebra:

Jedes Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ vom Grad $n \geq 1$

mit komplexen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$

*hat (*bei "Mehrfachzählung") immer n Nullstellen und*

kann gschrieben werden in der Form: $p(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$.

*Bsp.

$p(z) = z^3 - 2z^2 + z = 1 \cdot (z-0) \cdot \underline{(z-1)} \cdot \underline{(z-1)} = z^1 \cdot (z-1)^2$

Bsp. quadratische Gleichung:

$p(z) = z^2 - 2z + 2$

hat Grad $n = 2$ und somit in $\mathbb{C}$ genau 2 Nullstellen*:

Mitternachtsformel: $a = 1,\ b = -2,\ c = 2$:

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$\rightarrow z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$

$\Rightarrow$ komplex konjugierte Lösung $z_2 = \overline{z_1} = \overline{1+i} = 1 - i$

Komplexe Zahlen:

- $i^2 = -1$
- Kartesische Koordinaten: $z = a + ib = \underbrace{a}_{Re(z)} + i \cdot \underbrace{b}_{Im(z)}$
- Komplex konjugiertes: $\overline{z} = a - ib$

Hinweis: komplexe Lösungen sind immer paarweise konjugiert!
(d.h. quadr. Gleichung mit Lös. $x_1 = a + i \cdot b \rightarrow x_2 = a - i \cdot b$)

Polarkoordinaten ($\longleftrightarrow$ kartesischen Koordinaten):

Polarkoordinaten: $z = re^{i \cdot \varphi}$ (kart. Koo.: $z = a + i \cdot b$)

$r = |z| = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (arctan hat 2 Lösungen!! $\rightarrow$ <u>kontrolliere a</u>)

(oder φ graphisch bestimmen)

mit $\underline{a = r \cdot \cos(\varphi)}$ $b = r \cdot \sin(\varphi)$

Gleichung lösen in Polarkoordinaten:

Gleichungen der Form:

$w^n = a + ib$ (kann rechts auch eine reelle Zahl sein $\rightarrow b = 0$)

oder

$w = \sqrt[n]{a + ib} \quad \widehat{=} \quad w^n = a + ib$

hat n Lösungen:

$$w_1, \ldots, w_n = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot (k-1)\right)}, \quad k = 1, \ldots, n$$

(siehe Beispiel rechts)

Beispiel: Gleichung lösen in Polarkoordinaten

$w^3 = 1 + i \quad \widehat{=} \quad w = \sqrt[3]{1+i}$ hat 3 Lösungen!

Polarkoordinaten von $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \pi/4}$

Formel: $w_1, \ldots, w_3 = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{i \cdot \left(\frac{\pi/4}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot (k-1)\right)}, \quad k = 1, \ldots, 3$

$w_1 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 0\right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12}\right)}$,

$w_2 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 1\right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{9\pi}{12}\right)}$,

$w_3 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 2\right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{17\pi}{12}\right)}$

Bruch vereinfachen zu Komplexer Zahl:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

Beispiel: $z_1 = 3 + 5i, \quad z_2 = 4 + 2i$

$$= \frac{(3+5i) \cdot (4-2i)}{(4+2i) \cdot (4-2i)} = \frac{(3+5i) \cdot (4-2i)}{4^2 \underbrace{+}_{-i^2} 2^2} = \frac{(3 \cdot 4 \overbrace{+}^{-i^2} 5 \cdot 2) + i \cdot (5 \cdot 4 - 3 \cdot 2)}{20}$$

$$= \frac{22 + i \cdot (14)}{20} = \frac{22}{20} + i\frac{14}{20} = \quad 1.1 + 0.7i$$

Multiplikation / Division mit Polarkoordinaten:

$z_1 = r_1 e^{i \cdot \varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i \cdot \varphi_2}$

$z_1 \cdot z_2 = \left(r_1 e^{i \cdot \varphi_1}\right) \cdot \left(r_2 e^{i \cdot \varphi_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad z^n = \left(r \cdot e^{i\varphi}\right)^n = r^n \cdot e^{i \cdot (n \cdot \varphi)}$

Komplexe Zahlen

Vorzeigeaufgaben:

Bestimme für $z = 1 - i$ explizit die Polarkoordinaten r, φ und berechne alle Lösungen von $z^3 = 1 - i$.

HS18 Uebungen Serie 5 Aufgabe 2

(a) Geben Sie die Polarform folgender komplexer Zahlen an:

$$z_1 = i - 1, \qquad z_2 = \sqrt{3} - i, \qquad z_3 = 2, \qquad z_4 = -i, \qquad z_5 = 2 + 2\sqrt{3}i.$$

(b) Berechnen Sie folgende Multiplikationen und Divisionen mittels Polarform.

Geben Sie die Resultate in kartesischer Form an!

$$z_1 z_4, \qquad \frac{z_5}{z_2}, \qquad z_2 z_5, \qquad \frac{z_1}{z_4}.$$

Lösung: (a) $z_1 = \sqrt{2}e^{i\cdot 3\pi/4}$ $z_2 = 2e^{-i\cdot\pi/6}$ $z_3 = 2e^{i\cdot 0}$ $z_4 = 1e^{i\cdot 3\pi/2}$ $z_5 = 4e^{i\cdot\pi/3}$
(b) $z_1 z_4 = 1 + i$ $\frac{z_5}{z_2} = 2i$ $z_2 z_5 = 4\sqrt{3} + 4i$ $\frac{z_1}{z_4} = -1 - i$

HS15 Uebungen Serie 5 Aufgabe 2

ii) Bestimme für $z = 1 + i$ explizit die Polarkoordinaten r, φ und berechne alle möglichen Werte von $\sqrt[5]{z}$.

Lösung: ii) $\sqrt[10]{2}e^{i(\pi/20 + 2\pi j/5)}$, $0 \leq j \leq 4$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$:

a) $4z^2 + 8z + 29 = 0$, b) $z^3 = i$

Lösung: a) $z_1 = -1 + \frac{5}{2}i,\ z_2 = -1 - \frac{5}{2}i$ b) $z_0 = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_0 = 1 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $z_2 = 1 \cdot e^{i\frac{9\pi}{6}}$

HS18 Uebungen Serie 6 Aufgabe 4a)

Löse folgendes komplexe lineare Gleichungssystem: (i)

$$\begin{aligned} z_1 + iz_2 &= 2 \\ (1+i)z_1 + (i-1)z_2 &= 2i + 2 \end{aligned}$$

Lösung: (i) $L = \{(2 - iz_2, z_2),\ z_2 \in \mathbb{C}\}$

HS18 Uebungen Serie 6 Aufgabe 4b

Berechne die Determinante für folgende Matrizen. Gib an, ob sie regulär sind und falls ja, berechne die Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 1-i \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & i & 2 \\ 2 & 1+2i & 8 \\ 2 & 1+i & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung: $\det(A) = 0$ $\det(B) = 2 - i \to B^{-1} = \frac{1}{2-i}\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ -i & 1+i \end{pmatrix}$ $\det(D) = 0$