Gaus / LGS – Lösungen

Vorzeigeaufgabe: **ETH Caspar Wi17 Aufgabe 1e)**

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gauss-Verfahren und geben Sie die Lösung an.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

e) (*3 Punkte*) Man rechnet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{III+II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II+2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{III-2II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ETH Caspar So16 Aufgabe 2d) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit dem Gauss-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

d) (*3 Punkte*) Man rechnet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{II-2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III-1/3II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4/3 & -4/3 \end{array}\right).$$

Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

ETH Caspar So14 Aufgabe 2f)

Seien $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Cx = b$ mit dem Gauss-Verfahren.

f) Mit Gauss-Verfahren folgt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right]$$

Dann $x_3 = -3$, deswegen ist $x_2 = 4$ und $x_1 = 5$. Dass heisst

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

ETH Caspar Wi13 Aufgabe 2a)

Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind.

a) Es gilt $\mathrm{Rang}(A) = 2$.

b) Es gilt $\mathrm{Rang}(A) = 3$.

c) Das lineare Gleichungssystem $Ax = c$ hat eine eindeutige Lösung.

d) Das lineare Gleichungssystem $Ax = c$ hat unendlich viele Lösung.

3. (*12 Punkte*)

a) MC-Aufgabe

Ein lineares Gleichungssystem $Ax = c$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A|c)$.
Wir haben

$$A|c = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 15 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Somit ist $\mathrm{Rang}(A) = 3 = \mathrm{Rang}(A|c)$. Also ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar. Es folgt

i) falsch
ii) richtig
iii) richtig
iv) falsch

ETH Caspar Wi13 Aufgabe 2c) Lösen Sie mit dem Gauss-Verfahren das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Die Lösung lautet $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ETH Caspar So12 Aufgabe 2d) Gegeben sei das homogene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ mit

$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -2 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 4 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das LGS nur die triviale Lösung hat.

d) Das Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nicht-triviale Lösungen genau dann, wenn $\det(A) = 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -2 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 4 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 2\alpha + 1.$$

Eine Nullstelle ist $\alpha_1 = 1$. Mit Polynomdivision finden wir

$$\alpha^3 - 2\alpha + 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 1) = (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\alpha - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Somit hat $Ax = 0$ nur die triviale Lösung für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

ETH Caspar Wi12 Aufgabe 3b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 7 & 8 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right).$$

Die Lösung lautet $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.