DGLs – Lösungen

ETH Caspar Wi17 Aufgabe 3c)

Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{y(x)}{x} + 1\right)$ für $x > 0$, welche $y(4) = 3$ erfüllt.

c) (*3 Punkte*) Dieses Differentialgleichung kann mit der Methode der Variation der Konstanten gelöst werden.

Die homogene Gleichung ist $y'(x) = \frac{1}{2x}y(x)$ mit Lösung

$$y(x) = Ke^{\frac{1}{2}\ln(x)} = K\sqrt{x},$$

denn $\int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x) + C$. Der Ansatz für die inhomogene Gleichung ist also $y(x) = K(x)\sqrt{x}$. Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung liefert

$$K'(x) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Daraus folgt

$$K(x) = \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + C$$

und somit ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = K(x)\sqrt{x} = x + C\sqrt{x} \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

Gesucht ist die Lösung mit $y(4) = 3$, daraus folgt $C = -\frac{1}{2}$. Die gesuchte Antwort ist also

$$y(x) = x - \frac{1}{2}\sqrt{x}.$$

ETH Caspar Wi17 Aufgabe 3d)

Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'(x) = -3x^2e^{y(x)}$ für $x \geq 0$ mit $y(0) = 0$.

d) (*4 Punkte*) Dieses Differentialgleichung kann mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden.

Schreibt man $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ und sortiert die y-Terme auf die linke Seite und die x-Terme auf die rechte Seite, erhält man aus der DGL die Gleichung

$$e^{-y}\,dy = -3x^2\,dx.$$

Auf beiden Seiten bildet man nun die Stammfunktion und rechnet aus

$$\int e^{-y}\,dy = \int -3x^2\,dx = -x^3 + C \qquad \text{mit } C \in R \text{ Konstante.}$$

Eine Stammfunktion der linken Seite ist $-e^{-y}$.

Die somit erhaltene Gleichung

$$-e^{-y} = -x^3 + C$$

löst man nach y auf und erhält

$$y = y(x) = -\ln(x^3 + \widetilde{C}) \qquad \text{mit } \widetilde{C} \text{ Konstante.}$$

Zuletzt wird die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ eigesetzt, welche $\widetilde{C} = 1$ liefert. Die gesuchte Lösung ist also

$$y(x) = -\ln(x^3 + 1).$$

ETH Caspar So16 Aufgabe 3c)

Finden Sie die allgemeine Lösung von $y'(x) = y(x) + x$.

Hinweis: Es gilt $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$.

c) (*2 Punkte*) Dieses System kann mit der Methode der Variation der Konstanten gelöst werden.

Die homogene Gleichung ist $y'(x) = y(x)$ mit Lösung $y(x) = Ke^{x}$. Der Ansatz für die inhomogene Gleichung ist also $y(x) = K(x)e^{x}$. Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung liefert

$$K'(x) \stackrel{!}{=} xe^{-x}.$$

Daraus folgt mit dem Hinweis (oder sonst mit partieller Integration)

$$K(x) = \int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

und somit

$$y(x) = K(x)e^{x} = Ce^{x} - x - 1 \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} \text{ Konstante.}$$

ETH Caspar So16 Aufgabe 3d)

Lösen Sie das Anfangswertproblem $y'(x) = x(y(x)^2 - 1)$ mit $y(0) = 0$.

Hinweis: Es gilt $\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)$.

d) (*5 Punkte*) Dieses System kann mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden.

Schreibt man $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ und sortiert die y-Terme auf die linke Seite und die x-Terme auf die rechte Seite, erhält man aus der DGL die Gleichung

$$\frac{1}{y^2-1}\,dy = x\,dx.$$

(Die stationären Lösungen $y(x) \equiv 1$ und $y(x) \equiv -1$ müssen nicht beachtet werden, da die gesuchte Lösung die Bedingung $y(0) = 0$ erfüllen muss.)

Auf beiden Seiten bildet man nun die Stammfunktion und rechnet aus

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C \qquad \text{mit } C \in R \text{ Konstante.}$$

Die Stammfunktion auf der linken Seite kann mit dem Hinweis (oder sonst mit Partialbruchzerlegung) berechnet werden

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y^2-1}\,dy &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{y-1}\,dy - \int \frac{1}{y+1}\,dy\right)\\ &= \frac{1}{2}(\ln|y-1| - \ln|y+1|) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|.\end{aligned}$$

Die somit erhaltene Gleichung

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

löst man nach y auf und erhält

$$\frac{y-1}{y+1} = \widetilde{C}e^{x^2} \qquad \text{mit } \widetilde{C} \neq 0 \text{ Konstante}$$

und daraus

$$y = y(x) = \frac{1 + \widetilde{C}e^{x^2}}{1 - \widetilde{C}e^{x^2}}.$$

Zuletzt wird die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ eigesetzt, welche $\widetilde{C} = -1$ liefert. Die gesuchte Lösung ist also

$$y(x) = \frac{1 - e^{x^2}}{1 + e^{x^2}}.$$

ETH Caspar Wi15 Aufgabe 3c)

Bestimmen Sie die Lösung der DGL $y'(x) = y(x)(x^2+1)$ mit dem Anfangswert $y(0) = 2$ mittels Trennung der Variablen.

c) Mittels Separation der Variablen erhalten wir

$$\frac{1}{y}dy = (x^2+1)dx.$$

Dann durch Integration

$$\log y = \frac{x^3}{3} + x + K \qquad \Longrightarrow \qquad y = K\exp\left(\frac{x^3}{3} + x\right).$$

Mittels Anfangswert erhalten wir

$$K = 2,$$

deshalb ist die Lösung

$$y = 2\exp\left(\frac{x^3}{3} + x\right).$$

ETH Caspar Wi15 Aufgabe 3d)

Schreiben Sie die dazugehörige homogene Differentialgleichung auf. Bestimmen Sie deren allgemeine Lösung.

ii) Bestimmen Sie nun die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung mittels Variation der Konstanten.

d) i) Die zugehörige homogene Differentialgleichung ist von der Form

$$y'(x) + \cos(x)y(x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = Ke^{-\sin(x)}.$$

ii) Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, verwenden wir die Methode der Variation der Konstanten. Für die allgemeine Lösung y_{allg} verwenden wir den Ansatz

$$y_{\text{allg}} = K(x)e^{-\sin(x)}.$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$y'_{\text{allg}} = K'(x)e^{-\sin(x)} - K(x)\cos(x)e^{-\sin(x)}.$$

Durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung erhalten wir

$$K'(x)e^{-\sin(x)} - \cos(x)K(x)e^{-\sin(x)} + \cos(x)K(x)e^{-\sin(x)} = (\cos(x) - \sin(x))e^{\cos(x)}.$$

Daraus folgern wir, dass

$$K'(x) = (\cos(x) - \sin(x))e^{\cos(x)+\sin(x)},$$

und deshalb gilt

$$K(x) = e^{\cos(x)+\sin(x)} + \widetilde{K}.$$

Durch die Wahl unseres Ansatzes schliessen wir

$$y_{\text{allg}} = (e^{\cos(x)+\sin(x)} + \widetilde{K})e^{-\sin(x)} = \widetilde{K}e^{-\sin(x)} + e^{\cos(x)},$$

wobei $\widetilde{K} \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

ETH Caspar So14 Aufgabe 3c)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = -\sin(x)y + e^{\cos x + x}, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

mittels Variation der Konstanten.

c) Die dazugehörige homogene Differentialgleichung ist von der Form

$$y'(x) = -\sin(x)y.$$

Via Trennung der Variablen sehen wir direkt, dass die allgemeine Loösung der homogenen DGL von der Form

$$y_{\text{hom}} = Ke^{\cos(x)}$$

ist. Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, verwenden wir die Methode der Variation der Konstanten. Für die allgemeine Lösung y_{allg} verwenden wir den Ansatz

$$y_{\text{allg}} = K(x)e^{\cos(x)}.$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$y'_{\text{allg}} = K'(x)e^{\cos(x)} - K(x)\sin(x)e^{\cos(x)}.$$

Durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung erhalten wir

$$K'(x)e^{\cos(x)} - K(x)\sin(x)e^{\cos(x)} = -\sin(x)K(x)e^{\cos(x)} + e^{\cos(x)+x}$$

Daraus folgern wir $K'(x) = e^x$ und daher

$$K(x) = e^x + \widetilde{K}.$$

Durch die Wahl unseres Ansatzes schliessen wir

$$y_{\text{allg}} = (e^x + \widetilde{K})e^{\cos(x)}.$$

Mit dem Anfangswert $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ folgt $K = 1 - e^{\pi/2}$. Die Lösung lautet somit

$$y(x) = (e^x + 1 - e^{\pi/2})e^{\cos(x)}.$$

ETH Caspar Wi13 Aufgabe 4b)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = y^2(x) + 2y(x)x + x^2 - 1 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.$$

Hinweis: Benutzen Sie eine geeignete Substitution.

b) Wir beobachten zuerst, dass unsere Differentialgleichung auf folgende Art umgeschrieben werden kann :

$$y'(x) = \big(y(x) + x\big)^2 - 1.$$

Wir benutzen die Substitution $u(x) := y(x)+x$. Dementsprechend gilt dass $u'(x) = y'(x) + 1$. Dies eingesetzt in die ursprüngliche Differentialgleichung führt zu

$$u'(x) = y'(x) + 1 = (y(x) + x)^2 - 1 + 1 = u(x)^2.$$

Durch Separation der Variablen erhalten wir

$$\int \frac{du}{u^2} = \int 1dx.$$

Daraus folgt

$$-\frac{1}{u(x)} = x + C$$

oder äquivalent

$$u(x) = \frac{1}{-x - C}.$$

Da $u(x) := y(x) + x$, schliessen wir, dass die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung von der Form

$$y(x) = \frac{1}{-x - C} - x$$

ist. Da unsere Anfangsbedingung $y(0) = 1$ lautet, folgt $C = -1$ und deshalb ist unsere Lösung des AWPs

$$y(x) = \frac{1}{-x + 1} - x.$$

ETH Caspar Wi13 Aufgabe 4c)

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}y'(x) + \cos(x)y(x) - e^{-2\sin(x)-\frac{1}{2}x} = 0.$$

i) Schreiben Sie die zugehörige homogene Differentialgleichung auf und finden Sie deren allgemeine Lösung.

ii) Geben Sie nun die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung an.

c) i) Die dazugehörige homogene Differentialgleichung ist von der Form

$$\frac{1}{2}y'(x) + y(x)\cos(x) = 0.$$

Via Separation der Variablen sehen wir direkt, dass die allgemeine Lösung der homogenen DG von der Form

$$y_{hom}(x) = Ke^{-2\sin x}, \quad K \in \mathbb{R},$$

ist.

ii) Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen, verwenden wir Variation der Konstanten. Für die allgemeine Lösung y_{allg} verwenden wir den Ansatz

$$y_{allg}(x) = K(x)e^{-2\sin(x)}.$$

Durch Ableiten erhalten wir

$$y'_{allg}(x) = K'(x)e^{-2\sin(x)} - K(x)2\cos(x)e^{-2\sin(x)}.$$

Durch das Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung folgt

$$\frac{1}{2}K'(x)e^{-2\sin(x)} - \frac{1}{2}K(x)2\cos(x)e^{-2\sin(x)} + \cos(x)K(x)e^{-2\sin(x)} = e^{-2\sin(x)-\frac{1}{2}x}.$$

Daraus folgern wir

$$\frac{1}{2}K'(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$$

und deshalb gilt

$$K(x) = -4e^{-\frac{1}{2}x} + \tilde{K}, \quad \tilde{K} \in \mathbb{R}.$$

Durch die Wahl unseres Ansatz schliessen wir

$$y_{allg}(x) = (-4e^{-\frac{1}{2}x} + \tilde{K})e^{-2\sin(x)} = -4e^{-\frac{1}{2}x-2\sin(x)} + \tilde{K}e^{-2\sin(x)}.$$