Stetig - Lösungen

Vorzeigeaufgabe: Seien $a > 0$ eine reelle Zahl und f eine Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{a+x^2} & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Für welche a ist f stetig in $x_0 = 1$?

d) Wir suchen $a \in \mathbb{R}$ so dass

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4}{a+x^2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}$$

erfüllt ist. Für den Grenzwert erhalten wir

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4}{a+x^2} = \frac{1}{a+1},$$

also folgt $a = 1$.

ETH Caspar Wi17 Aufgabe 1d) Sei $b \in \mathbb{R}$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b\ln(x)}{x^2-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Wie muss b gewählt werden, damit f eine stetige Funktion auf dem ganzen Definitionsbereich $\mathbb{R}^{>0}$ ist?

d) (*1 Punkt*) Da f für $x \neq 1$ nach Definition stetig ist, bleibt als Bedingung, dass f auch in $x = 1$ stetig sein muss. Das heisst, es muss gelten $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Mit der Regel von l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{b}{2x^2} = \frac{b}{2} \stackrel{!}{=} 2 = f(1).$$

Daraus folgt

$$b = 4.$$

ETH Caspar So16 Aufgabe 1d) Sei $b \in \mathbb{R}$ und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b\sin(x)}{\pi^3-x^3} & \text{für } x \neq \pi \\ \frac{1}{\pi^2} & \text{für } x = \pi. \end{cases}$$

Wie muss b gewählt werden, damit f eine stetige Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ ist?

d) (*1 Punkt*) Da f für $x \neq \pi$ nach Definition stetig ist, bleibt als Bedingung, dass f auch in $x = \pi$ stetig sein muss. Das heisst, es muss gelten $\lim_{x\to \pi} f(x) = f(\pi)$. Mit der Regel von l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to \pi} f(x) = \lim_{x\to \pi} \frac{b\cos(x)}{-3x^2} = \frac{-b}{-3\pi^2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\pi^2} = f(\pi).$$

Daraus folgt

$$b = 3.$$

ETH Caspar Wi15 Aufgabe 1f) Seien a eine reelle Zahl und f eine Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^2}{4}x^2 - 5a + 8, & \text{für } x \geq 2 \\ x^2, & \text{für } x < 2. \end{cases}$$

Für welche a ist f stetig?

f) Die Funktion f ist stetig genau dann, wenn

$$\frac{a^2}{4}x^2 - 5a + 8\Big|_{x=2} = x^2\Big|_{x=2}.$$

Durch Einsetzen erhalten wir die Gleichung

$$a^2 - 5a + 4 = 0$$

als Bedingung an a. Diese Gleichung wird gelöst durch

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 4.$$

Deshalb gilt:

richtig	falsch	
⊗	○	$a = 1.$
○	⊗	$a = 2.$
○	⊗	$a = 3.$
⊗	○	$a = 4.$

ETH Caspar Wi13 Aufgabe 1d) Seien $a > 0$ eine reelle Zahl und f eine Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 0 \\ \ln(a+x) & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Für welche a ist f stetig in $x_0 = 0$?

d) Wir suchen a so dass

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \overset{!}{=} \lim_{x\to 0} \ln(a+x)$$

erfüllt ist. Es gilt $\lim_{x\to 0} \ln(a+x) = 0 \Leftrightarrow \ln(a) = 0$. Also folgt $a = 1$.