Entwicklungsmodelle

Vorzeigeaufgabe: **ETH Caspar So16 Aufgabe 2e)**

Gegeben sei das Entwicklungsmodell $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + y_n \\ y_{n+1} = y_n. \end{cases}$

i) Sei $v_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie die Matrix A an, mit der das Entwicklungsmodell in Matrixschreibweise geschrieben werden kann, d.h. in der Form $v_{n+1} = Av_n$.

Bestimmen Sie zusätzlich $b \in \mathbb{R}$ so, dass der Vektor $\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.

Hinweis: Falls Sie die Matrix A nicht gefunden haben, bestimmen Sie b so dass $\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der Matrix $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

ii) Geben Sie einen Startvektor $v_0 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ an, sodass die Folge der Vektoren $v_0, v_1, v_2, \dots$ zum Nullvektor $v_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ konvergiert.

Hinweis: Falls Sie Teilaufgabe i) nicht gelöst haben, nehmen Sie wieder die Matrix $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und die Entwicklung $v_{n+1} = \tilde{A}v_n$.

e) *(2+2 Punkte)*

i) Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter muss für den Eigenvektor gelten

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b/2+1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $\lambda = 1$ und anschliessend

$$b = 2.$$

Hinweis: Rechnet man mit der Matrix $\widetilde{A}$ erhält man auf die gleiche Weise

$$b = 2.$$

ii) Die Eigenwerte der Matrix A kann man aus Aufgabe **2e)** i) direkt ablesen (weil Dreiecksmatrix) und zwar sind es $1, \frac{1}{2}$. Dazugehörige Eigenvektoren w_1 und w_2 sind linear unabhängig. Ein beliebiger Startvektor v_0 kann also als Linearkombination

$$v_0 = \alpha w_1 + \beta w_2$$

der Eigenvektoren geschrieben werden mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Damit die Folge $v_n = A^n v_0$ zum Nullvektor konvergiert, muss wegen Linearität $\alpha = 0$ sein, denn

$$v_n = A^n v_0 = A^n(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha w_1 + \beta \frac{1}{2^n} w_2.$$

Also gilt $v_0 = \beta w_2$. Daraus folgt, dass v_0 ein Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{1}{2}$ ist und somit

$$v_0 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \neq 0.$$

Hinweis: Rechnet man mit der Matrix $\widetilde{A}$ sind die Eigenwerte $1, -\frac{1}{2}$. Die gleiche Überlegung zeigt, dass v_0 ein Eigenvektor zum Eigenwert $-\frac{1}{2}$ sein muss. Also

$$v_0 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \neq 0.$$

ETH Caspar So11 Aufgabe 3d) Wir betrachten ein Modell, welches die Entwicklungen zweier Populationen j_n und a_n beschreibt. Dabei bezeichnen j_n und a_n die Grösse der jeweiligen Population zum Zeitpunkt n.

Formal sei die Entwicklung beschrieben durch die Gleichung

$$j_n = \frac{1}{n} \cdot j_{n-1} \tag{1}$$

$$a_n = j_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a_{n-1}. \tag{2}$$

i) Beschreiben Sie die Gleichungen (1) und (2) durch ein Matrix-Vektor-Produkt $A \cdot v$, und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

ii) Wie entwicikeln sich die Populationen j_n und a_n für einen beliebigen Startvektor (j_0, a_0), mit $j_0 > 0$ und $a_0 > 0$, im Laufe der Zeit, das heisst, für wachsendes n?

d) *i)* In Matrix-Vektor Notation wird die Entwicklung durch das System

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{n-1} \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ und $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ können wir direkt ablesen.

ii) Da $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, gibt es keinen dominanten Eigenwert und die Populationen sterben aus.

ETH Caspar Wi17 Aufgabe 2f)

Die Matrix C sei $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

i) Die Matrix C hat den Eigenwert $\lambda = 5$ mit dazugehörigem Eigenvektor $\begin{pmatrix} b \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie b.

ii) Gegeben sei das Entwicklungsmodell $v_{n+1} = Cv_n$ in Matrixschreibweise. Es gelte $v_{100} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie v_{99}.

f) *(1+2 Punkte)*

i) Für den Eigenvektor muss gelten

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+8 \\ -2b-6 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 5\begin{pmatrix} b \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$b = 2.$$

ii) Wegen $v_{100} = Cv_{99}$ gilt

$$v_{99} = C^{-1}v_{100}.$$

Aus Teilaufgabe i) folgt, dass $v_{100} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von C zum Eigenwert $\lambda = 5$ ist (als Vielfaches des Eigenvektors $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$). Somit ist v_{100} auch ein Eigenvektor von C^{-1} und zwar zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$. Es folgt

$$v_{99} = C^{-1}v_{100} = \frac{1}{5}v_{100} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Altenativ: Die Matrix C^{-1} lässt sich auch ausrechnen, z.B. mit der Formel

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt genauso

$$v_{99} = C^{-1}v_{100} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Altenativ: Man kann auch einfach das Gleichungssystem $v_{100} = Cv_{99}$ für v_{99} lösen, also

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dieses ergibt die Gleichungen $-1 = x - 4y$ und $1 = -2x + 3y$ mit Lösung $x = -1/5$ und $y = 1/5$. Man findet wiederum

$$v_{99} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ETH Caspar Wi17 Aufgabe 2g)

Das Entwicklungsmodell einer Population sei in Matrixschreibweise $v_{n+1} = Bv_n$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch?

a) Für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stirbt die Population aus.

b) Für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stirbt die Population aus.

c) Für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stirbt die Population aus.

d) Für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stirbt die Population aus.

g) (*2 Punkte*) Rechnet man Bv_0 aus, sieht man sofort, dass die Vektoren in den Antwortmöglichkeiten 1,2 und 3 alles Eigenvektoren von B sind und zwar zu den Eigenwerten 2, $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$. Für Eigenvektoren v_0 mit Eigenwert λ gilt

$$v_n = Bv_{n-1} = \ldots = B^n v_0 = \lambda^n v_0.$$

Daraus folgt direkt, dass Antwort 2 und 3 richtig sein müssen (λ^n konvergiert in diesem Fall gegen Null) und Antwort 1 falsch (λ^n explodiert), denn $|\pm\frac{1}{2}| < 1$ aber $|2| > 1$.

Antwort 4 kann man auch ausschliessen, denn hier ist v_0 die Summe der Vektoren aus Antwort 1 und 2, also die Summe der Eigenvektoren zum Eigenwert 2 und $\frac{1}{2}$. Es gilt somit in diesem Fall

$$v_n = B^n v_0 = B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + B^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Population stirbt nicht aus.

Die richtigen Antworten sind also

richtig	falsch	
○	⊗	Für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stirbt die Population aus.
⊗	○	Für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stirbt die Population aus.
⊗	○	Für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stirbt die Population aus.
○	⊗	Für den Startvektor $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stirbt die Population aus.