Kurvendiskussion - Lösungen

ETH Caspar Wi17 Aufgabe 1a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 \ln(x)$.

1. (*12 Punkte*)

a) (*1 Punkt*) Die Ableitung ist mit Kettenregel

$$f'(x) = 2x \ln(x) + x.$$

ETH Caspar Wi17 Aufgabe 1b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 \ln(x)$ aus Aufgabe 1a) besitzt bei $x_0 = e^a$ ein Minimum. Bestimmen Sie den Exponenten a.

b) (*1 Punkt*) Die Ableitung f' von f ist $f'(x) = 2x \ln(x) + x$, siehe Aufgabe **1a)**. Es gilt also $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $2\ln(x) + 1 = 0$, da $x > 0$. Die einzige kritische Stelle ist also bei $x_0 = e^{-\frac{1}{2}}$. Tatsächlich ist das auch ein Minimum, da $f'(x) < 0$ für $x < e^{-\frac{1}{2}}$ und $f'(x) > 0$ für $x > e^{-\frac{1}{2}}$. Das gesuchte a ist also

$$a = -\frac{1}{2}.$$

ETH Caspar Wi17 Aufgabe 1c) Sei $c \in \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 \ln(x)$ aus Aufgabe 1a) ist für $0 < x < e^c$ nach rechts gekrümmt und für $x > e^c$ nach links gekrümmt. Bestimmen Sie den Exponenten c.

c) (*1 Punkt*) Die zweite Ableitung von f ist wieder mit Kettenregel $f''(x) = 2\ln(x) + 3$. Somit gilt $f''(x) > 0$ (also nach links gekrümmt) genau dann, wenn $x > e^{-\frac{3}{2}}$, und $f''(x) < 0$ (also nach rechts gekrümmt) genau dann, wenn $x < e^{-\frac{3}{2}}$. Daraus folgt

$$c = -\frac{3}{2}.$$

ETH Caspar So16 Aufgabe 1c) Bestimmen Sie das **grösste** $c < 0$, sodass die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{1+x}$ für alle $x < c$ streng monoton wachsend ist.

c) (*1 Punkt*) Es gilt $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(1+x)^2} > 0$ genau dann wenn $x^2 + 2x > 0$. Dies ist erfüllt falls $x < -2$ oder $x > 0$. Das heisst, das gesuchte c ist

$$c = -2.$$

ETH Caspar Wi12 Aufgabe 1f)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.
Auf welchem Intervall I ist die Funktion f streng monoton wachsend? $\quad I =]-1,1[\quad I =]-3,-2[\quad I =]1,2[$

f) Wir berechnen

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad f'(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Die Funktion $f(x)$ ist streng monoton wachsend, wenn $f'(x) > 0$, d.h. $1 - x^2 > 0$, weil $1 + x^2$ immer positiv ist. Es folgt, dass $f(x)$ auf dem Intervall $I =]-1,1[$ streng monoton wachsend ist.

ETH Caspar Wi13 Aufgabe 1f)

Gegeben sei die Funktion $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(\sin(x))$.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

a) Es gilt $f'(x) = \tan(x)$.

b) Es gilt $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

c) f ist monoton wachsend auf $\left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$.

d) Es gilt $\int_{1/2}^{1} e^{f\left(\frac{\pi}{2}x\right)} dx = 1$.

f) i) Falsch, da $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = (\tan x)^{-1}$

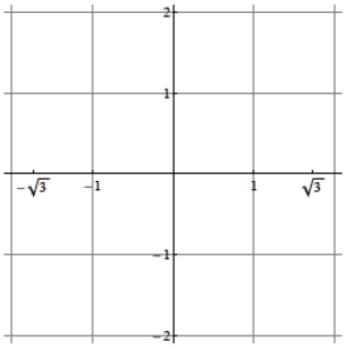
ii) Richtig, da $f(\pi/2) = \ln 1 = 0$.

iii) Die Funktion $\ln x$ ist monoton wachsend für alle $x > 0$. Wenn $x \in [\pi/4, 1]$ ist, ist $\sin x$ positiv und auch monoton wachsend. Deshalb ist die Komposition $\ln(\sin x)$ auch monoton wachsend auf $[\pi/4, 1]$. Somit ist $iii)$ richtig.

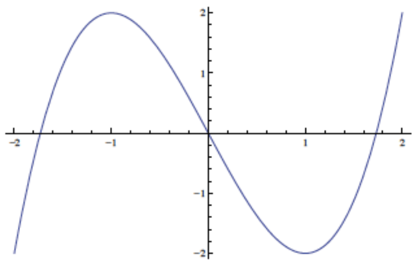
iv) Falsch, da

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx &= -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}}^{1} \\ &= -\frac{2}{\pi}\left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \neq 1. \end{aligned}$$

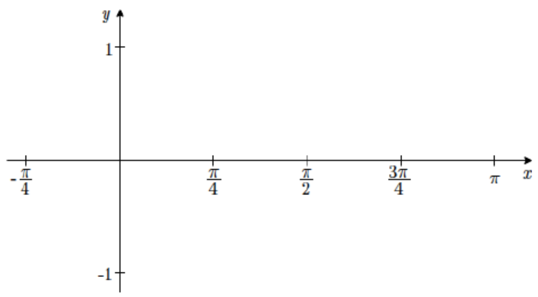
ETH Caspar So11 Aufgabe 1e) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x$. Skizzieren Sie den Graphen von f und geben Sie die Koordinaten der lokalen Extrema an.



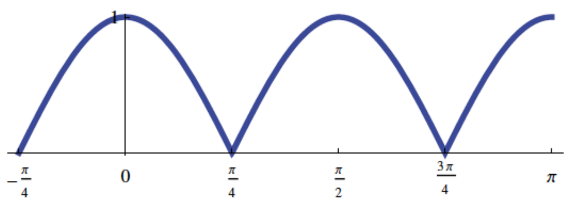
e) Das lokale Minimum ist in $(1, -2)$ und das lokale Maximum in $(-1, 2)$.



ETH Caspar Wi15 Aufgabe 1b) Gegeben sei die Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto f(x) = \left|\cos^2(x) - \sin^2(x)\right|$.
Skizzieren Sie den Graphen G_f in folgendem Koordinatensystem.
Hinweis: Verwenden Sie $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$.

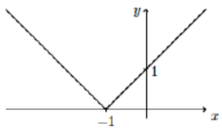


b) Der Graph:

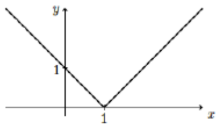


ETH Caspar Wi17 Aufgabe 1h) Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = |1 + x|$.
Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch?

a) Der Graph von f ist



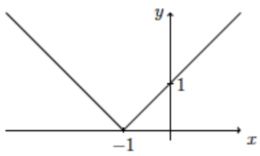
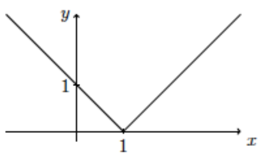
b) Der Graph von f ist



c) Die Funktion f ist in -1 differenzierbar.

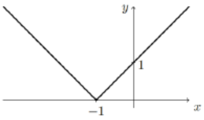
d) Die Funktion f ist in 0 differenzierbar.

h) *(2 Punkte)* Die Funktion $f(x) = |1 + x|$ hat in 1 den Wert $f(-1) = 0$, was einen der beiden Graphen direkt ausschliesst. Der andere ist korrekt. Weiter ist f in 0 und 1 differenzierbar mit Ableitung 1.

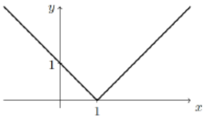
richtig	falsch	
⊗	○	Der Graph von f ist 
○	⊗	Der Graph von f ist 
○	⊗	Die Funktion f ist in -1 differenzierbar.
⊗	○	Die Funktion f ist in 0 differenzierbar.

ETH Caspar So16 Aufgabe 1g) Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = |1 - x|$.
Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Der Graph von f ist



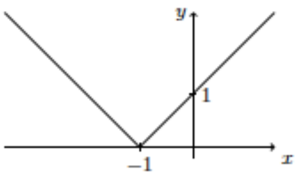
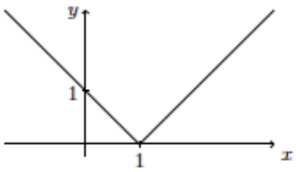
b) Der Graph von f ist



c) Die Funktion f ist in 1 differenzierbar mit $f'(1) = 0$.

d) Die Funktion f ist in 0 differenzierbar mit $f'(0) = -1$.

g) (*2 Punkte*) Die Funktion $f(x) = |1 - x|$ hat in 1 den Wert $f(1) = 0$, was einen der beiden Graphen direkt ausschliesst. Weiter ist f in 1 nicht differenzierbar, da dort die Ableitung von links $(= -1)$ nicht mit der Ableitung von rechts $(= 1)$ übereinstimmt. Die anderen beiden Antworten sind richtig.

richtig	falsch	
○	⊗	Der Graph von f ist 
⊗	○	Der Graph von f ist 
○	⊗	Die Funktion f ist in 1 differenzierbar mit $f'(1) = 0$.
⊗	○	Die Funktion f ist in 0 differenzierbar mit $f'(0) = -1$.