Grenzwerte - Lösungen

ETH Caspar Wi15 Aufgabe 1a) Gegeben sei die Folge $(x_n)_n$ mit $x_n = \sum_{i=1}^{n} i$. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2}$.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Summe $x_n = \sum_{i=1}^{n} i$.

1. (*8 Punkte*)

a) Wir haben $x_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, darum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

ETH Caspar So14 Aufgabe 1a) Berechnen Sie $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x + \sin(x) - \sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} \right)$.

1. (*8 Punkte*)

a) Mit Kürzen des Bruchs folgt

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x + \sin(x) - \sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin(x)} + 1 - \cos(x) \right) = 1.$$

Alternativ folgt die Lösung mit L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x + \sin(x) - \sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1 + \cos(x) - \cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)} \right) = 1.$$

ETH Caspar Wi13 Aufgabe 1a) Berechnen Sie $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x + \sin(x)}$

1. (*10 Punkte*)

a) Es gilt:

$$\frac{2x}{x + \sin(x)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

mit $f(x) = 2x$ und $g(x) = x + \sin(x)$. Alle Voraussetzungen der Regel von De l'Hôpital sind erfüllt, denn

- $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$,
- $g'(x) = 1 + \cos(x) \neq 0$ in der Nähe von 0,
- $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+\cos(x)} = 1$.

Somit gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1.$$

ETH Caspar Wi13 Aufgabe 1b) Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2 - 1 - \arctan x}{x - 1}$.

Bestimmen Sie die Asymptote g von f für $x \to +\infty$.

b) Für

$$f(x) = \frac{x^2 - 1 + \arctan x}{x - 1} = x + 1 + \frac{\arctan x}{x - 1}$$

ist

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x + 1)) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan x}{x - 1} = 0.$$

Das heisst, dass die Asymptote durch $g(x) = x + 1$ gegeben ist.

ETH Caspar So12 Aufgabe 1a) Gegeben seien die Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{x^3 - 5}{x - 1} \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^2 + x + 1.$$

Berechnen Sie: $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x))$.

1. *(10 Punkte)*

a) Wir führen Polynomdivision durch und erhalten $(x^3 - 5) : (x - 1) = x^2 + x + 1 - \frac{4}{x-1}$. Also ist $g(x)$ die Asymptote von $f(x)$ und somit folgt, dass

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - g(x) = 0.$$

ETH Caspar So12 Aufgabe 1b) Berechnen Sie $\lim_{h \to 0} \frac{2 - \sqrt{4 + \sqrt{h}}}{\sqrt{h}}$.

Hinweis: Eine Möglichkeit ist, den Bruch geschickt zu erweitern und eine binomische Formel anzuwenden.

b) Wir erweitern und kürzen den Ausdruck wie folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{2 - \sqrt{4 + \sqrt{h}}}{\sqrt{h}} = \lim_{h \to 0} \frac{(2 - \sqrt{4 + \sqrt{h}})(2 + \sqrt{4 + \sqrt{h}})}{\sqrt{h}(2 + \sqrt{4 + \sqrt{h}})} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2 + \sqrt{4 + \sqrt{h}}} = -\frac{1}{4}.$$

Man kann den Limes auch mit l'Hospital berechnen:

$$\lim_{h \to 0} \frac{2 - \sqrt{4 + \sqrt{h}}}{\sqrt{h}} = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{1}{2}(4 + \sqrt{h})^{-1/2} \frac{1}{2} h^{-1/2}}{\frac{1}{2} h^{-1/2}} = -\frac{1}{4}.$$

ETH Caspar So11 Aufgabe 1 Berechnen Sie a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^3+4x^2}$, b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x)(x-\frac{\pi}{2})$.

b) Wir benutzen L'Hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x)(x-\frac{\pi}{2}) &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(x)}{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}} \\ &\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos(x)^2}}{-\frac{1}{(x-\frac{\pi}{2})^2}} \\ &= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{\cos(x)^2} \\ &\overset{\text{L'Hôpital}}{=} -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2(x-\frac{\pi}{2})}{-2\sin(x)\cos(x)} \\ &\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)^2-\sin(x)^2} = -1.\end{aligned}$$

1. (*10 Punkte*)

a) Wir berechnen

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^3+4x^2} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2)}{3x^2+8x} = \frac{1}{4}.$$

ETH Caspar Wi12 Aufgabe 1 Berechnen Sie a) $\lim_{x\to 1} \frac{(\ln(x))^2}{x^3-3x+2}$, b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x^3-x-1}{3x^5-2x-7}$.

1. (*10 Punkte*)

a) Wir benutzen L'Hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)^2}{x^3-3x+2} &\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2\frac{\ln(x)}{x}}{3x^2-3} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{3}\frac{\ln(x)}{x^3-x} \\ &\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2}{3}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2-1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

b) Wir berechnen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x^3-x-1}{3x^5-2x-7} = 0.$$