Integral – Lösungen

ETH Caspar Wi17 Aufgabe 1e) Berechnen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2\cos(x)$.

Hinweis: Es gilt $\int x\sin(x)dx = \sin(x) - x\cos(x) + C$.

e) (*1 Punkt*) Mit partieller Integration und dem Hinweis folgt

$$\begin{aligned}\int x^2\cos(x)\,dx &= x^2\sin(x) - 2\int x\cos(x)\,dx\\ &= (x^2-2)\sin(x) + 2x\cos(x) + C.\end{aligned}$$

ETH Caspar Wi17 Aufgabe 1i) Sei f die Funktion mit $f(x) = |1+x|$. Berechnen Sie

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

i) (*1 Punkt*) Es gilt

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2,$$

wie man direkt aus dem Graphen von f ablesen kann (siehe Aufgabe **1h)**) oder auch durch Ausrechnen des Integrals.

ETH Caspar So16 Aufgabe 1b) Berechnen Sie

$$\int \frac{6x-2}{3x^2-2x-5}dx.$$

Dabei können Sie die Integrationskonstante $C = 0$ wählen. **Hinweis:** Das geht auch ohne Partialbruchzerlegung.

b) (*1 Punkt*) Der Zähler $6x-2$ ist genau die Ableitung des Nenners $3x^2-2x-5$. Sei also $f(x) = 3x^2-2x-5$. Dann gilt mit der Formel aus der Vorlesung (und $C = 0$ als Integrationskonstante)

$$\int \frac{6x-2}{3x^2-2x-5}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| = \ln|3x^2-2x-5|.$$

Falls man über Partialbruchzerlegung rechnet (und dabei $C = 0$ als Integrationskonstante wählt) erhält man äquivalent dazu

$$\begin{aligned}\int \frac{6x-2}{3x^2-2x-5}\,dx &= \int \frac{6x-2}{3(x-\frac{5}{3})(x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{A}{x-\frac{5}{3}} + \frac{B}{x+1}\,dx\\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{3}\int \frac{3}{x-\frac{5}{3}} + \frac{3}{x+1}\,dx = \ln|x-\tfrac{5}{3}| + \ln|x+1|,\end{aligned}$$

wobei $(*)$ durch Auflösen von $A + B = 6$ und $A - \frac{5}{3}B = -2$ folgt.

ETH Caspar So16 Aufgabe 1h) Sei f die Funktion mit $f(x) = |1 + x|$. Berechnen Sie

$$\int_0^2 f(x)dx.$$

h) (*1 Punkt*) Es gilt

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 1,$$

wie man direkt aus dem Graphen von f ablesen kann (siehe Aufgabe **1g)**) oder auch durch Ausrechnen des Integrals (Integral aufteilen in 0 bis 1 und 1 bis 2).

ETH Caspar Wi15 Aufgabe 1c) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos^2(x) - \sin^2(x)\right| dx.$$

c) Durch das Additionstheorem für cos sehen wir, dass

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos^2(x) - \sin^2(x)\right| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos(2x)\right| dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx \\ &= \sin(2y)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

ETH Caspar So14 Aufgabe 1e) (*) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx.$$

e) Mit Substitution $t = \sqrt{x}$ und partieller Integration folgt

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^2 e^t\,2t\,dt = e^t\,2t\Big|_1^2 - \int_1^2 2e^t\,dt = 2\,e^2$$

ETH Caspar So14 Aufgabe 1f) Seien M_0, T positive reelle Zahlen. Seien $I = [0,T]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) = \frac{M_0}{(x+1)^2}$ und Mittelwert $\mu = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$. Für welche T und M_0 ist $\mu < 1$?

a) $M_0 = 1, T = 1$ b) $M_0 > 5, T = 2$ c) $M_0 = 3/2, T = 1$ d) $M_0 = 3/2, T = 1/3$.

f) Mit dem Hauptsatz ist $\mu = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\ dx = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{M_0}{(x+1)^2}\ dx = \frac{M_0}{T+1}$ und daher

richtig	falsch	
$\otimes$	$\bigcirc$	$M_0 = 1,\ T = 1.$
$\bigcirc$	$\otimes$	$M_0 > 5,\ T = 2.$
$\otimes$	$\bigcirc$	$M_0 = \frac{3}{2},\ T = 1.$
$\bigcirc$	$\otimes$	$M_0 = \frac{3}{2},\ T = \frac{1}{3}.$

ETH Caspar Wi13 Aufgabe 1e) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_{-A}^{A} e^{-|x|}dx$ mit $A = \ln 2$.

e) Wir berechnen

$$\int_{-A}^{A} e^{-|x|}dx = \int_{-A}^{0} e^{x}dx - \int_{0}^{A} e^{-x}dx = 2\left(1 - e^{-A}\right).$$

Falls $A = \ln 2$ ist, gibt es

$$2\left(1 - e^{-A}\right) = 2\left(1 - e^{-\ln(2)}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

ETH Caspar So12 Aufgabe 1e) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |3x - x^3|dx$.

e) Wir berechnen

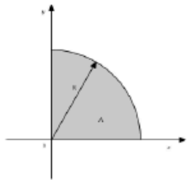
$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |3x - x^3|dx = \int_{-\sqrt{3}}^{0} x^3 - 3xdx - \int_{0}^{\sqrt{3}} x^3 - 3xdx = \frac{9}{2}.$$

ETH Caspar Wi12 Aufgabe 1e) Berechnen Sie das folgende Integral: $\int_1^{\sqrt{\pi/2+1}} x\cos(1-x^2)dx$.

e) Wir nehmen die Substitution $y = 1 - x^2$. Das Integral ist dann

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{\frac{\pi}{2}+1}} x\cos(1-x^2)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{-\pi/2} \cos(y)\frac{-1}{2}\,\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{2}[\sin(y)]_0^{-\pi/2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ETH Caspar Wi13 Aufgabe 1g) Sei A wie in untenstehender Skizze das erste Viertel des Kreises um Null mit Radius $R = 2$: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}|x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.



Welche der folgenden Integral haben denselben Wert wie der Flächeninhalt von A?

a) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$, b) $\frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$, c) $2\int_0^{\pi/2} d\varphi$, d) $8\int_0^{\pi/4} d\varphi$.

g) i) Diese Aussage ist richtig, weil die dargestellte Fläche gerade die Fläche des ersten Viertelkreises ist. Dieser ist durch die Funktion $x^2 + y^2 = 4, x \in [0,2]$ gegeben. Wir lösen diese Kreisgleichung nach y auf und erhalten

$$y = \pm\sqrt{4-x^2},\ x \in [0,2].$$

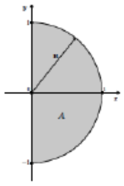
Damit $y \in [0,2]$ gilt, erhalten wir die einzige Lösung $y = \sqrt{4-x^2}$. Also ist diese graue Fläche A durch $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ gegeben.

ii) Diese Aussage ist falsch. Begründung siehe Teilaufgabe i).

iii) Die Aussage iii) ist richtig, denn die Fläche eines Viertels des Kreises mit Radius R ist $\frac{1}{4}R^2\pi$ und der Wert des Integrals $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}\varphi$ ist $\pi = \frac{4}{4}\pi$.

iv) Diese Aussage ist falsch. Begründung siehe Teilaufgabe iii).

ETH Caspar So12 Aufgabe 1g) Die Fläche A sei die rechte Hälfte der Kreisscheibe um Null mit Radius $R = 1$, das heisst, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2|x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$.



Welche der folgenden Integral haben denselben Wert wie der Flächeninhalt von A?

a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$, b) $2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$, c) $2\int_0^{\pi/2} d\varphi$, d) $\int_0^{\pi/2} d\varphi$.

g) i) Diese Aussage ist falsch, denn die dargestellte Fläche ist gerade die Fläche des halben Einheitskreises. Dieser ist durch die Funktion $x^2 + y^2 = 1, x \in [0,1]$ gegeben. Lösen wir diese Kreisgleichung nach y auf so erhalten wir

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

mit $x \in [0,1]$. Also ist diese graue Fläche A durch $2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ gegeben.

ii) Diese Aussage ist richtig. Begründung siehe Teilaufgabe i).

iii) Die Aussage iii) ist auch falsch, denn die Fläche eines Halbkreises mit Radius 1 ist $\frac{\pi}{2}$ und der Wert des Integrals $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}\varphi$ ist π.

iv) Diese Aussage ist richtig, denn wir sehen schnell, dass $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}\varphi = \varphi|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$, was mit dem Flächeninhalt der grauen Fläche A übereinstimmt.