Linear unabhängig

Vorzeigeaufgabe: **ETH Caspar Wi17 Aufgabe 1d)** Sei $c \in \mathbb{R}$. Geben Sie die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} c \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wie muss c gewählt werden, damit die drei Vektoren linear abhängig sind?

d) (*1 Punkt*) Die drei Vektoren sind linear abhängig genau dann, wenn die 3x3 Matrix, deren Spalten die gegebenen Vektoren sind, Determinante gleich Null hat. Wir rechnen

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & c \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 2 - 3c + 12 + 1 = 15 - 3c.$$

Die Determinante verschwindet (und folglich sind die Vektoren linear abhängig) falls

$$c = 5.$$

ETH Caspar Wi15 Aufgabe 2g) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

g) v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig, wenn

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & t \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Die Determinante ist

$$t(3t - 4).$$

Deshalb muss $t \neq 0$ und $t \neq \frac{4}{3}$ gelten.

ETH Caspar Wi13 Aufgabe 2e)

Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$ so, dass die folgenden Vektoren linear unabhängig sind.

$$\begin{pmatrix} x \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e) Die gegebenen Vektoren sind linear abhängig, genau dann, wenn

$$0 = \det \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -x + 2 + 2 - 2x = -3x + 4,$$

also sind die Vektoren linear abhängig, falls $x = \frac{4}{3}$.

ETH Caspar Wi12 Aufgabe 3c)

Bestimmen Sie α so, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

c) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -\alpha + 20 - \alpha^2$. Für $\alpha \in \{-5, 4\}$ sind die Vektoren linear abhängig.

Diverses

ETH Caspar Wi15 Aufgabe 2a) Seien a und b reelle Zahlen und $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ eine Matrix.

Finden Sie ein Paar (a, b) mit $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

2. (*14 Punkte*)

a) Man berechnet $A = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$. Daraus folgt $ab = 2$ und $b^2 - a^2 = 3$. Dann

$$(a_1, b_1) = (1, 2) \qquad\qquad (a_2, b_2) = (-1, -2)$$

ETH Caspar Wi15 Aufgabe 2c)

Seien a und b reelle Zahlen und $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Matrizen. Welche der folgenden Aussagen sind für alle Paar $(a, b) \neq (0, 0)$ richtig?

a) B ist invertierbar.

b) B ist symmetrisch.

c) $B^2 = B$.

d) $\det(B) = \det(A)$.

c)

richtig	falsch	
⊗	○	B ist invertierbar.
○	⊗	B ist symmetrisch.
○	⊗	$B^2 = B$.
⊗	○	$\det(B) = \det(A)$.

ETH Caspar So14 Aufgabe 2a)

Sei $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $A^2 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dabei gilt $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta < 2\pi$.

Welche der folgenden Aussagen sind für jedes φ mit $0 < \varphi < \pi$ richtig?

a) $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ b) $\alpha = \delta = 2\varphi$ c) $\beta = \gamma = \varphi^2$ d) $\beta = -\gamma$

Hinweis: Verwenden Sie zum Beispiel die Additionstheoreme:

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b) \qquad \cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$

2. (*14 Punkte*)

a) Wir sehen $A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) & -2\cos(\varphi)\sin(\varphi) & 0 \\ 2\cos(\varphi)\sin(\varphi) & \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und mit den Additionstheoremen $A^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & -\sin(2\varphi) & 0 \\ \sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und damit $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 2\varphi$.

richtig	falsch	
⊗	○	$\alpha = \beta = \gamma = \delta$
⊗	○	$\alpha = \delta = 2\varphi$
○	⊗	$\beta = \gamma = \varphi^2$
○	⊗	$\beta = -\gamma$

ETH Caspar So14 Aufgabe 2b)

Sei $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie zwei Winkel φ_1 und φ_2 mit $\varphi_1 \neq \varphi_2$ und $0 < \varphi_1, \varphi_2 < 2\pi$, für die $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.

b) Da $A^4 = \begin{pmatrix} \cos(4\varphi) & -\sin(4\varphi) & 0 \\ \sin(4\varphi) & \cos(4\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, gilt für die Winkel $0 < \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} < 2\pi$ somit $A^4 = E_3$.

ETH Caspar So12 Aufgabe 2a)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind.

a) Alle Eigenwerte von A sind verschieden von 0.

b) Die Spaltenvektoren von A sind linear abhängig.

c) Es ist $\det(A) = 0$.

d) Die Matrix A ist invertierbar.

a) **MC Frage**

Hier ist $\det(A) = 0$, daher gilt

i) falsch
ii) richtig
iii) richtig
iv) falsch.

ETH Caspar Wi12 Aufgabe 3a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

a) Das folgende Gleichungssystem ist eindeutig lösbar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig.

c) Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ lässt sich als nicht-triviale Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ schreiben.

d) Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten besitzt mindestens eine Lösung.

a) Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

i) richtig, denn

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

und somit ist der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der Koeffizientenmatrix und das Gleichungssystem ist lösbar. Weiter ist der Rang der Koeffizientenmatrix gleich der Anzahl Unbekannten und daher ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

ii) falsch (die drei angegebenen Vektoren sind linear unabhängig)

iii) richtig (folgt aus i)).

iv) falsch (Beispielsweise ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ x &= 2 \\ x + y + z + w &= 0, \end{aligned}$$

nicht lösbar. Allgemein ist $Ax = b$ lösbar, falls $\mathrm{Rg}(A|b) = \mathrm{Rg}(A)$. Im obigen Beispiel gilt $\mathrm{Rg}(A) = 2 \neq 3 = \mathrm{Rg}(A|b)$.)

ETH Caspar So11 Aufgabe 3a)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

a) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

b) Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ist invertierbar.

c) Die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ hat 0 als einen Eigenwert.

d) Das lineare Gleichungssystem $\left\{ \begin{array}{cccc} x & & +2z & = 0 \\ 2x & -y & +3z & = 0 \\ 3x & -y & +5z & = 0 \end{array} \right\}$ besitzt nur die triviale Lösung.

3. (*12 Punkte*)

a) Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

i) falsch, denn

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

ii) falsch, (da die Determinante der Matrix 0 ist).

iii) richtig (da die Determinante der Matrix 0 ist).

iv) falsch (die Determinante der Koeffizientenmatrix ist gleich 0, daher besitzt das homogene Gleichungssystem unendlich viele Lösungen).