Komplexe Zahlen – Lösungen

ETH Caspar Wi17 Aufgabe 2a)

Sei $z = \dfrac{1+3i}{2+i} + (1+i)^2 e^{i\pi}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch?

a) $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ b) $z = 1+i$ c) $z = 1-i$ d) $z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2. (*14 Punkte*)

a) (*2 Punkte*) Es gilt in kartesischer Darstellung $e^{i\pi} = -1$. Durch Erweitern der Brüche erhält man

$$z = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} - (1+i)^2 = \frac{5+5i}{5} - 2i = 1-i$$

Weiter ist davon die Polardarstellung $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Die richtigen Antworten sind also

richtig	falsch	
○	⊗	$z = e^{-i\pi/2}$
○	⊗	$z = -i$
⊗	○	$z = 1-i$
⊗	○	$z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

ETH Caspar Wi17 Aufgabe 2b) Die Gleichung $z^3 = 8i$ besitzt die Lösungen $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ und $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$
Geben Sie die dritte Lösung **in kartesischer Darstellung** an.

b) (*1 Punkt*) Die Gleichung $z^3 = 8i$ besitzt drei Lösungen. Diese kann man durch aufeinanderfolgende Drehungen um den gleichen Winkel erhalten (entspricht Addition oder Subtraktion des Winkels in der Polardarstellung). Die Differenz der Winkel der angegebenen Lösungen ist $\frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{2\pi}{3}$. Die dritte Lösung der Gleichung ist somit

$$z_3 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Die gesuchte Antwort ist die kartesische Darstellung von z_3. Wegen $e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ ist also

$$z_3 = -\sqrt{3} + i.$$

ETH Caspar So16 Aufgabe 2a) Das Resultat der Rechnung $\frac{1+i}{i} + \frac{i}{i-1} - \frac{1}{1+i} = z$ ist

a) $z = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ b) $z = -i$ c) $z = 1 - i$ d) $z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2. (*14 Punkte*)

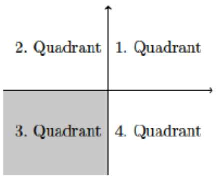
a) (*2 Punkte*) Durch Erweitern der Brüche erhält man

$$z = \frac{-i(1+i)}{-i \cdot i} + \frac{i(-i-1)}{(i-1)(-i-1)} - \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = 1 - i - \frac{i-1}{2} - \frac{1-i}{2} = 1 - i.$$

Weiter ist davon die Polardarstellung $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Die richtigen Antworten sind also

richtig	**falsch**	
○	⊗	$z = e^{-i\pi/2}$.
○	⊗	$z = -i$.
⊗	○	$z = 1 - i$.
⊗	○	$z = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

ETH Caspar So16 Aufgabe 2b) Die Gleichung $z^4 - 4i = 0$ besitzt im ersten Quadranten die Lösung $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$. Geben Sie die Polardarstellung $z_3 = re^{i\varphi}$ (mit $r > 0$ und $-\pi < \varphi \leq \pi$) der Lösung z_3 im **dritten Quadranten** an. (siehe Abbildung).



b) (*1 Punkt*) Die Gleichung $z^4 - 4i = 0$ besitzt vier Lösungen. Diese können wir durch aufeinanderfolgende Drehungen um $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ der angegebenen Lösung z_1 erhalten (entspricht Addition oder Subtraktion von $i\frac{\pi}{2}$ in der Polardarstellung). Die Lösung im 3. Quadranten finden wir durch zweimalige Subtraktion von $\frac{\pi}{2}$, also

$$z_3 = \sqrt{2}e^{i\pi/8 - 2 \cdot i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}e^{-i\pi 7/8}.$$

Alternativ: Die Lösung folgt auch durch Auflösen von $z^4 = r^4 e^{4i\varphi} = 4i \overset{!}{=} 4e^{i\pi/2 + 2\pi k}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ nach r und φ, sodass $-\pi < \varphi \leq -\pi/2$ gilt.

ETH Caspar Wi13 Aufgabe 2a) Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

a) $\frac{i^{24} + i^{27} + i^{36} + 3i^{41}}{i + i} = 2$

b) $(1+i)^4 - (1-i)^4 = 16$

c) $(1+i)^5(1-i)^5 = 32$

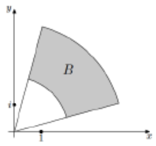
d) $i^{16} + i^{22} - i^{33} + i^{17} = i$

2. (*8 Punkte*)

a) i) und iii) sind richtig.

ETH Caspar Wi13 Aufgabe 2b)

Die Skizze unten zeigt ein Gebiet B in der komplexen Ebene mit $\left\{ z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \,\middle|\, 2 \le r \le 4, \frac{\pi}{12} \le \varphi \le \frac{5\pi}{12} \right\}$.



Entscheiden Sie, für welche Zahlen z_1 und z_2 der Quotient $z = \frac{z_1}{z_2}$ in B liegt.

a) $z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ und $z_2 = i$ b) $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ und $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{i}{6}$

c) $z_1 = \frac{5}{4}e^{\frac{\pi}{3}i}$ und $z_2 = \frac{1}{2}e^{\frac{5\pi}{12}i}$ d) $z_1 = 5e^{\frac{5\pi}{3}i}$ und $z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i}$

b) i) richtig

$$z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i = 3e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ und } z_2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow z = 3e^{i\frac{\pi}{6}} \in B$$
$$\text{da } 2 \le 3 \le 4 \text{ und } \frac{\pi}{12} \le \frac{\pi}{6} \le \frac{5\pi}{12}.$$

ii) falsch

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ und } z_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{i}{6} = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow z = 3e^{i\frac{2\pi}{3}} \notin B$$
$$\text{da } \frac{2\pi}{3} > \frac{5\pi}{12}.$$

iii) falsch

$$z_1 = \frac{5}{4}e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ und } z_2 = \frac{1}{2}e^{\frac{5\pi}{12}i} \Rightarrow z = \frac{5}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}} \notin B$$
$$\text{da } \frac{-\pi}{12} \le \frac{\pi}{12}.$$

iv) richtig

$$z_1 = 5e^{\frac{5\pi}{3}i} \text{ und } z_2 = 2e^{\frac{3\pi}{2}i} \Rightarrow z = \frac{5}{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \in B$$
$$\text{da } 2 \le \frac{5}{2} \le 4 \text{ und } \frac{\pi}{12} \le \frac{\pi}{6} \le \frac{5\pi}{12}.$$

ETH Caspar Wi13 Aufgabe 2c) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von z mit $arg(z) = \frac{2\pi}{3}$ und $z \cdot \tilde{z} = 4$.

c)

$$|z \cdot \bar{z}| = 4 \;\Rightarrow\; |z| \cdot |\bar{z}| = 4 \;\Rightarrow\; |z| = 2 \;\Rightarrow\; z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow z = -1 + \sqrt{3}i \Rightarrow Re(z) = -1 \text{ und } Im(z) = \sqrt{3}.$$

ETH Caspar Wi13 Aufgabe 2d)

Die Gleichung $z^3 = \frac{8}{i}$ hat drei verschiedene Lösungen z_1, z_2 und z_3.

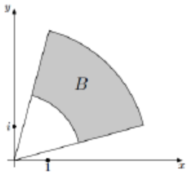
$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$. Bestimmen Sie die Lösungen z_2 und z_3 jeweils in der Form $r \cdot e^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$.

d) $z^3 = \frac{8}{i} = -8i = 8e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{\frac{\pi}{2}i} \\ z_2 &= 2e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)i} = 2e^{\frac{7\pi}{6}i} \\ z_3 &= 2e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)i} = 2e^{\frac{11\pi}{6}i}. \end{aligned}$$

ETH Caspar So12 Aufgabe 2b)

Die Skizze unten zeigt ein Gebiet B in der komplexen Ebene mit $B = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid 2 \leq r \leq 4,\ \frac{\pi}{12} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{12}\}$.



Entscheiden Sie, für welche Zahlen z_1 und z_2 das Produkt $z_1 \cdot z_2$ in B liegt.

a) $z_1 = 3 + 3\sqrt{3}i$ und $z_2 = \dfrac{1}{2}$.

b) $z_1 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$ und $z_2 = s\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$.

c) $z_1 = 5e^{\frac{\pi}{15}i}$ und $z_2 = \dfrac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$.

d) $z_1 = 3e^{\frac{\pi}{3}i}$ und $z_2 = e^{\frac{\pi}{4}i}$.

b) i) richtig

$$z_1 = 3 + i3\sqrt{3} = 6e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ und } z_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 3e^{i\frac{\pi}{3}} \in B$$
$$\text{da } 2 \leq 3 \leq 4 \text{ und } \frac{\pi}{12} \leq \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{12}.$$

ii) falsch

$$z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i = 3e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ und } z_2 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} = 4e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z = 12e^{i\frac{5\pi}{12}} \notin B$$
$$\text{da } 12 > 4.$$

iii) richtig

$$z_1 = 5e^{\frac{\pi}{15}i} \text{ und } z_2 = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}i} \Rightarrow z = \frac{5}{2}e^{i\frac{7\pi}{30}} \in B$$
$$\text{da } 2 \leq \frac{5}{2} \leq 4 \text{ und } \frac{\pi}{12} \leq \frac{7\pi}{30} \leq \frac{5\pi}{12}.$$

iv) falsch
$z \in B$, wobei $z = z_1 z_2$, mit $z_1 = 3e^{\frac{\pi}{3}i}$ und $z_2 = e^{\frac{\pi}{4}i}$.

$$z_1 = 3e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ und } z_2 = e^{\frac{\pi}{4}i} z = 3e^{i\frac{7\pi}{12}} \notin B$$
$$\text{da } \frac{7\pi}{12} > \frac{5\pi}{12}.$$

ETH Caspar Wi12 Aufgabe 2a) Schreiben Sie $z = 7\sqrt{3} - 7i$ in der Form $re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$.

2. (*8 Punkte*)

a) In der Eulerschen Darstellung haben wir

$$z = 14e^{\frac{11\pi}{6}i}.$$