Eigenwerte - Lösungen

Vorzeigeaufgabe: **ETH Caspar Wi17 Aufgabe 2c)** Die Matrix A sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenwert von A ist $\lambda_1 = 2$. Geben Sie die beiden anderen Eigenwerte von A an.

c) (*2 Punkte*) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} &= \lambda^2(1-\lambda) + 4 - 2 + 2\lambda - 2(1-\lambda) - 2\lambda \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda \\ &= \lambda(-\lambda^2 + \lambda + 2). \end{aligned}$$

Die Nullstellen davon sind $\lambda = 0$ sowie $\lambda = 2$ und $\lambda = -1$. Also ist

$$\lambda_2 = 0 \qquad \lambda_3 = -1.$$

ETH Caspar Wi15 Aufgabe 2b)

Seien a und b reelle Zahlen und $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ eine Matrix. Finden Sie ein b, so dass A genau einen Eigenwert hat.

b) Charakteristisches Polynom von A ist $\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2$ mit Diskriminante $-4b^2$. A hat genau einen Eigenwert wenn Diskriminante Null ist. Dass heisst $b = 0$.

ETH Caspar Wi15 Aufgabe 2f)

Sei $C = \begin{pmatrix} 16-1 & -1 & \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Finden Sie ein Paar (x, y), so dass $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von C ist.

f) Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h. $x - y = \lambda x$ und $2y = \lambda y$. Dann entweder $\lambda = 2$ und

$$(x_1, y_1) = (1, -1),$$

oder $y = 0$ und dann $\lambda = 1$ und

$$(x_2, y_2) = (1, 0).$$

ETH Caspar So16 Aufgabe 2c) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

i) $\lambda_1 = 2 + \sqrt{1+a}$. Geben Sie die weiteren Eigenwerte von A an.

ii) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ eine nicht-triviale Lösung $x \neq 0$ besitzt.

iii) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass A zwei komplexe Eigenwerte mit Betrag 3 hat.

c) *(2+1+1 Punkte)*

i) Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & a \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda) - a)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3 - a) = 0.$$

Die Nullstellen von $\lambda^2 - 4\lambda + (3-a)$ sind $\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{1+a}$. Also ist

$$\lambda_1 = 2 + \sqrt{1+a} \qquad \lambda_2 = 2 - \sqrt{1+a} \qquad \lambda_3 = 1.$$

ii) Gesucht ist a, sodass $\det(A) = 0$. Entweder rechnet man $\det(A)$ aus (das Ergebnis ist $\det(A) = 3 - a$) oder man benutzt, dass die Determinante das Produkt der Eigenwerte ist. Aus Aufgabe **2c)** i) sieht man, dass A einen Eigenwert Null hat, falls

$$a = 3.$$

iii) Aus Aufgabe **2c)** i) sieht man, dass $a < -1$ gelten muss, damit man überhaupt komplexe Eigenwerte hat. Insbesondere ist dann $-a-1 > 0$. Dann gilt $\lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{1+a} = 2 \pm \sqrt{-(-a-1)} = 2 \pm i\sqrt{-a-1}$ mit Betrag $|\lambda_{1/2}| = \sqrt{2^2 + \sqrt{-a-1}^2} = \sqrt{3-a} \stackrel{!}{=} 3$. Somit muss gelten

$$a = -6.$$

ETH Caspar So14 Aufgabe 2d)

Sei wieder $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Der Vektor $v = \begin{pmatrix} i \\ b \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von B. Bestimmen Sie die Koordinate b.

Sei $w = \begin{pmatrix} -i \\ y \end{pmatrix}$ ein weiterer Eigenvektor von B. Best. Sie die Koordinate y so, dass v und w linear unabhängig sind.

d) Wende die Matrix auf den Vektor an. Mit der Gleichung $Bv = \lambda v$ folgt dann $b = y = 1$.

ETH Caspar Wi15 Aufgabe 2d) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 der Matrix $\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Charakteristisches Polynom der Matrix $\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist

$$\det\left(\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda I_3\right) = (1-\lambda)(\lambda^2 + 6\lambda + 25).$$

Die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 = -3 + 4i, \qquad \lambda_2 = -3 - 4i, \qquad \lambda_3 = 1.$$

ETH Caspar Wi15 Aufgabe 2e)
Wir betrachten die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 aus Teil d) in der komplexen Zahlenebene.
Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Jeder Eigenwert hat Betrag 1.

b) Genau ein Eigenwert liegt auf der reellen Achse.

c) Genau ein Eigenwert hat als Argument φ mit $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

d) Genau ein Eigenwert hat als Argument φ mit $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

Hinweis: Falls Sie Teil d) nicht lösen konnten, wählen Sie für diese Aufgabe die Werte:

$$\lambda_1 = (\sqrt{3} + i)^4, \qquad \lambda_2 = (\sqrt{3} - i)^4, \qquad \lambda_3 = -1.$$

e) MC-Aufgabe

richtig	falsch	
○	⊗	Jeder Eigenwert hat Betrag 1.
⊗	○	Genau ein Eigenwert liegt auf der reellen Achse.
○	⊗	Genau ein Eigenwert hat als Argument φ mit $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.
⊗	○	Genau ein Eigenwert hat als Argument φ mit $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

ETH Caspar So14 Aufgabe 2c) Sei $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Eigenwerte von B sowohl in kartesischer Darstellung als auch in Polardarstellung.

c) Die Eigenwerte sind die Lösungen der Gleichung $(\sqrt{3}-\lambda)^2+1 = \lambda^2-2\sqrt{3}\lambda+4 = 0$ und damit

Kartesisch

$$\lambda_1 = \sqrt{3}+i, \quad \lambda_2 = \sqrt{3}-i.$$

Polar

$$\lambda_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad \lambda_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

ETH Caspar So12 Aufgabe 3b)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind.

a) Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.

b) Der Vektor $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A.

c) Der Vektor $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)\cdot 1 \\ (1+i)\cdot(-2i) \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A^{-1}.

d) Der Vektor $\begin{pmatrix} -1+i \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)\cdot i \\ (1+i)\cdot 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A^{-1}.

b) MC Frage

Es gilt

i) richtig, da $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} = (1+2i)\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$.

ii) falsch, da $A\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i-1 \\ 4i+1 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$.

iii) richtig, mit $\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ ist auch jedes Vielfache $c \cdot v_1$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A. Weiter haben A und A^{-1} die gleichen Eigenvektoren.

iv) falsch, sonst müsste $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ auch Eigenvektor von A sein, was falsch ist (vgl. ii)).