Fixpunkt

Vorzeigeaufgabe: ETH Caspar So16 Aufgabe 1e)

Die Entwicklung $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{2a_n}$ besitzt zwei Fixpunkte a^* und $\tilde{a}$. Rechnen Sie die Fixpunkte aus. (einer der Fixpunkte ist positiv, der andere ist negativ)

e) (*2 Punkte*) Die Entwicklung ist gegeben durch $a_{n+1} = f(a_n)$ mit Reproduktionsfunktion $f(x) = \dfrac{x+3}{2x}$. Die Fixpunkte sind die Lösungen von $f(x) = x$, umgeschrieben also von $2x^2 - x - 3 = 0$. Das heisst

$$a^\star = \frac{3}{2} > 0 \qquad \text{und} \qquad \tilde{a} = -1 < 0.$$

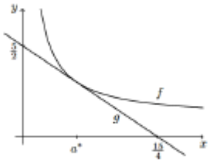
Vorzeigeaufgabe: ETH Caspar So16 Aufgabe 1f)

Sei $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{2a_n}$ die Entwicklung mit den Fixpunkten a^* und $\tilde{a}$ aus Aufgabe 1e) und sei f die Reproduktionsfunktion der Entwicklung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

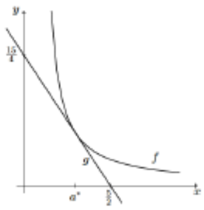
a) Für jeden Startwert a_0 nahe a^* gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a^*$.

b) Für jeden Startwert a_0 nahe $\tilde{a}$ gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \tilde{a}$.

c) Die Gerade g zeigt die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt a^*:



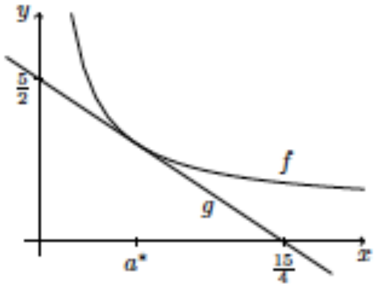
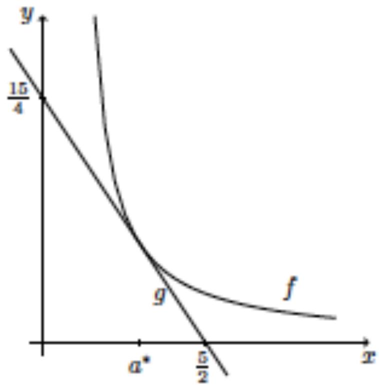
d) Die Gerade g zeigt die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt a^*:



f) (*2 Punkte*) Ein Fixpunkt a einer Entwicklung mit Reproduktionsfunktion f ist attraktiv falls $|f'(a)| < 1$ und abstossend falls $|f'(a)| > 1$. In unserem Fall ist $f'(x) = -\dfrac{6}{4x^2}$ und somit gilt für die Fixpunkte aus Aufgabe **1e)**

$$|f'(a^*)| = |f'(3/2)| = 2/3 < 1 \qquad \text{und} \qquad |f'(\widetilde{a})| = |f'(-1)| = 3/2 > 1.$$

Insbesondere hat also die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt a^* Steigung strikt zwischen -1 und 1. Die richtigen Antworten sind also

richtig	falsch	
⊗	○	Für jeden Startwert a_0 nahe a^* gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a^*$.
○	⊗	Für jeden Startwert a_0 nahe $\widetilde{a}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \widetilde{a}$.
⊗	○	Die Gerade g zeigt die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt a^*: 
○	⊗	Die Gerade g zeigt die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt a^*: 

ETH Caspar Wi17 Aufgabe 1f)

Seien $b, c \in \mathbb{R}$ fest. Sei die Entwicklung $(a_n)_n$ mit $a_0 \neq 0$ gegeben durch:

$$a_{n+1} = \frac{ba_n + c}{a_n}.$$

Wie müssen b und c gewählt werden, damit die Entwicklung die zwei Fixpunkte $a^* = 1$ und $a^{**} = 2$ besitzt?

f) (*2 Punkte*) Die Entwicklung ist gegeben durch $a_{n+1} = f(a_n)$ mit Reproduktionsfunktion $f(x) = \dfrac{bx + c}{x}$. Damit $a^* = 1$ und $a^{**} = 2$ Fixpunkte der Entwicklung sind, muss $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$ gelten. Daraus folgen die Bedingungen $b + c = 1$ und $b + \frac{c}{2} = 2$ und somit

$$b = 3 \qquad \text{und} \qquad c = -2.$$

ETH Caspar So16 Aufgabe 1a)

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \sin(x) - x\cos(x)$.

Die Ableitung f' hat im Intervall $[0, 2\pi]$ zwei Fixpunkte x_1 und x_2 mit $x_1 = 0$ und $x_2 =$.

a) (*2 Punkte*) Die Ableitung ist

$$f'(x) = \cos(x) - (\cos(x) - x\sin(x)) = x\sin(x).$$

Für einen Fixpunkt von f' muss gelten $f'(x) = x\sin(x) \stackrel{!}{=} x$. Daraus folgt, dass entweder $x = 0$ (schon auf dem Aufgabenblatt angegeben) oder $\sin(x) = 1$. Diese letzte Gleichung hat für x im Intervall $[0, 2\pi]$ genau eine Lösung und zwar

$$x_2 = \frac{\pi}{2}.$$

ETH Caspar So14 Aufgabe 1b) b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + x - \frac{1}{4}$. Bestimmen Sie die beiden Fixpunkte $x_{\infty,1}$ und $x_{\infty,2}$.

b) Für einen Fixpunkt gilt $f(x_\infty) = x_\infty$, damit folgt $x_{\infty,1} = -\dfrac{1}{2}, \quad x_{\infty,2} = \dfrac{1}{2}$.

ETH Caspar So14 Aufgabe 1c) c) Sei f wie in b). Sei $(x_n)_n$ eine Folge mit $x_{n+1} = f(x_n)$. Für welchen Fixpunkt x_∞ gilt das folgende: Für jeden Startwert x_0 in der Nähe von x_∞ konvergiert die Folge (x_n) gegen x_∞.

c) Teste die Bedingung $|f'(x_{\infty,i})| < 1$ für $i = 1, 2$.

Das stimmt für $x_{\infty,1} = -\dfrac{1}{2}$, jedoch nicht für $x_{\infty,2} = \dfrac{1}{2}$. Damit folgt für den Fixpunkt $x_\infty = -\dfrac{1}{2}$ gilt: Für jeden Startwert x_0 in der Nähe von $x_\infty = -\frac{1}{2}$ konvergiert die Folge (x_n) gegen x_∞.

ETH Caspar Wi15 Aufgabe 1d) Gegeben sei die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \arccos(\sin(x))$. Bestimmen Sie den Fixpunkt $x_\infty \in [-1,1]$.

d) Sei x_∞ ein Fixpunkt von f. Das heisst

$$x_\infty = \arccos(\sin(x_\infty)).$$

Deshalb haben wir

$$\cos(x_\infty) = \sin(x_\infty),$$

und $x_\infty = \frac{\pi}{4}$.

ETH Caspar Wi17 Aufgabe 1g) Die Entwicklung einer Population sei gegeben durch $x_{n+1} = f(x_n)$ mit Reproduktionsfunktion f. Der Startwert sei $x_0 = \frac{1}{10}$. Welche der folgenden Aussagen sich richtig und welche falsch?

a) Für die Reproduktionsfunktion f mit $f(x) = x + \sin(x)$ stirbt die Population aus.

b) Für die Reproduktionsfunktion f mit $f(x) = x - \sin(x)$ stirbt die Population aus.

c) Für die Reproduktionsfunktion f mit $f(x) = \sin(x) - x$ stirbt die Population aus.

d) Für die Reproduktionsfunktion f mit $f(x) = x + x\cos(x)$ stirbt die Population aus.

g) (*2 Punkte*) Der Startwert $x_0 = \frac{1}{10}$ ist in der Nähe von Null. Der Punkt $a = 0$ ist für jede der angegebenen Reproduktionsfunktionen ein Fixpunkt, denn $f(0) = 0$ für alle vier Optionen. Weiter ist ein Fixpunkt a einer Entwicklung mit Reproduktionsfunktion f attraktiv falls $|f'(a)| < 1$ und abstossend falls $|f'(a)| > 1$. In unserem Fall sind die Ableitungen in der gleichen Reihenfolge wie in der Aufgabe

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \cos(x) \\ f(x) &= 1 - \cos(x) \\ f(x) &= \cos(x) - 1 \\ f(x) &= 1 + \cos(x) - x\sin(x) \end{aligned}$$

Es gilt also $|f'(0)| < 1$ für die zweite und dritte Option und $|f'(0)| > 1$ für die erste und vierte Option. Die richtigen Antworten sind also

richtig	falsch	
○	⊗	Für die Reproduktionsfunktion f mit $f(x) = x + \sin(x)$ stirbt die Population aus.
⊗	○	Für die Reproduktionsfunktion f mit $f(x) = x - \sin(x)$ stirbt die Population aus.
⊗	○	Für die Reproduktionsfunktion f mit $f(x) = \sin(x) - x$ stirbt die Population aus.
○	⊗	Für die Reproduktionsfunktion f mit $f(x) = x + x\cos(x)$ stirbt die Population aus.