Grenzwerte berechnen:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x+x^2}{1+x+e^x} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{2x} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{3x^2+x+1}$$

Formeln:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad \lim_{n\to 0^+}\frac{1}{n}=+\infty \qquad \lim_{n\to 0^-}\frac{1}{n}=-\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } \underbrace{-1<q<1}_{|q|<1} \\ \infty & \text{falls } |q|>1 \end{cases}$$

Bernoulli-de-l'Hôpital (BdH): $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Falls $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \text{"}\pm\frac{\infty}{\infty}\text{"}$ oder $\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ anwendbar (aber nicht immer)

(theoretisch auch $0^0, \infty^0, 1^\infty, \infty-\infty, 0\cdot\infty$)

- $\lim_{x\to\infty}\frac{1+x+x^2}{1+x+e^x}\left(=\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}\Rightarrow\right) \overset{\text{BdH}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{0+1+2x}{0+1+e^x}\left(=\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}\right)$

$\Rightarrow \overset{\text{BdH}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$ (weil $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$)

- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{2x}$ beinahe e^x-Formel, aber stimmt (noch) nicht

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\frac{1}{4}}{x}\right)^{2x}$$

(Bem.: Falls nicht e^x-Formel ist es ziemlich sicher q^n-Formel)

↓ 3. Potenz-Gesetz

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1/4}{x}\right)^{x}\right]^2$$

$$=\left[e^{1/4}\right]^2=e^{\frac{1}{4}\cdot 2}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

- $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{3x^2+x+1}$

Typisches Vorgehen:

① Grösste Nennerpotenz bestimmen und im Zähler und Nenner ausklammern (und kürzen)

② $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ benutzen

① x^2

$$\Rightarrow\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

② $\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$ ($\frac{1}{x}\to 0$, $\frac{1}{x^2}\to 0$)

$$=\frac{1}{3}$$

Bem.: Theoretisch reicht es, anhand der grössten Zähler- und Nennerpotenz (Z/N) zu folgern:

$Z<N \Rightarrow \lim = 0$

$Z>N \Rightarrow \lim = \infty$

$Z=N \Rightarrow \lim =$ Zahl