W'keit P(A) berechnen: Standard-Aufgabe

$$P(A) = \frac{\text{Anz. Günstige Fälle für A}}{\text{Anz. Mögliche Fälle überhaupt}} = \frac{G}{M}$$

**Aufgabe 30** (Austeilen von Jasskarten).

Vier Spieler sind am Jassen. Der Spielleiter verteilt die Karten und möchte dabei wissen, wie gross die (Laplace-)Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses $A$ ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für

**(a)** $A =$ [alle ♣ sind bei Spieler 1 und 2]

**(b)** $A =$ [Spieler 1 erhält alle Asse und alle 6er]

Anzahl Mögliche Fälle (um 36 Karten auf 4 Spieler anzuordnen): 36!

Fakultät

(a) Anzahl Günstige Fälle (um 9 Kreuz auf 18 Karten-Slots zu verteilen)

↳ Kombinatorik ohne Wiederholen, mit Reihenfolge

$$\frac{18!}{9!} = [18]_9$$

UND die restlichen 27 Karten zu verteilen/anzuordnen: 27!

$$\Rightarrow P(A) = \frac{G}{M} = \frac{[18]_9 \cdot 27!}{36!} = \frac{[18]_9}{[36]_9}$$

(b) Anzahl Günstige Fälle (um 8 Karten auf 9 Karten-Slots zu verteilen)

↳ Kombinatorik ohne Wiederholen, mit Reihenfolge

$$\frac{9!}{1!} = [9]_8$$

UND die restlichen 28 Karten zu verteilen/anzuordnen: 28!

$$\Rightarrow P(A) = \frac{G}{M} = \frac{[9]_8 \cdot 28!}{36!} = \frac{[9]_8}{[36]_8}$$

W'keit berechnen: next level – Details berücksichtigen

**(c)** $A =$ [Spieler 1 erhält genau zwei Asse und genau zwei 6er]

**(d)** $A =$ [Spieler 1 erhält mindestens einen König]

(c) Anzahl Günstige Fälle

um $\underbrace{\text{2 von 4 Assen}}_{\text{welche?!}}$ und 2 von 4 6er auf 9 Slots verteilen: $\frac{9!}{5!} = [9]_4$

2 von 4 auswählen, ohne Reihenfolge, ohne Wiederholen $\rightarrow$ $\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{Asse}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{6er}}$

UND die restl. 4 Asse/6er unter die anderen 27-Slots: $\frac{27!}{4!} = [27]_4$

die je 2 nicht ausgewählten, also klar welche

(damit Spieler 1 genau je 2 hat und nicht mehr)

UND die restl. 28 Karten verteilen: $28!$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{G}{M} = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot [9]_4 \cdot [27]_4 \cdot 28!}{36!} = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot [9]_4 \cdot [27]_4}{[36]_8}$$

(d) mindestens $\Rightarrow$ immer überlegen, ob Gegenwkeit einfacher ist?!

Gegenteil von mind. 1 ist weniger als 1 $\hat{=}$ keinen

$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\text{"kein König bei Sp. 1"})$

4 Könige auf 27 Slots verteilen: $\frac{27!}{23!} = [27]_4$

32 restl. Karten verteilen: $32!$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{[27]_4 \cdot 32!}{36!} = 1 - \frac{[27]_4}{[36]_4}$$

## Siebformel:

Analog zu

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

gilt für

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) \\ &- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \cdots - P(A_3 \cap A_4) \\ &+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &+ P(A_1 \cap A_3 \cap A_4 + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\ &- P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4). \end{aligned}$$

* **HS17-Aufabe 19:** Vier Spieler sind am Jassen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) Spieler I oder Spieler III kein Ass erhält.

(b) Spieler I ein 3-Blatt mit Ass erhält. (d.h. Dame, König, Ass von demselben Blatt)

(a) $A_1$ = "Spieler 1 erhält kein Ass"

$A_2$ = "Spieler 2 erhält kein Ass"

$$P(\text{Sp1 oder Sp2 erhält kein Ass}) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$\cdot\, P(A_1) = \frac{\frac{27!}{23!} \cdot 32!}{36!} = \frac{[27]_4}{[36]_4} = P(A_2)$$

$$\cdot\, P(A_1 \cap A_2) = \frac{\frac{18!}{14!} \cdot 32!}{36!} = \frac{[18]_4}{[36]_4}$$

$$P(A_1 \cup A_2) = \frac{[27]_4}{[36]_4} + \frac{[27]_4}{[36]_4} - \frac{[18]_4}{[36]_4}$$

$$= 2 \cdot \frac{[27]_4}{[36]_4} - 1 \cdot \frac{[18]_4}{[36]_4}$$

1 $A_i$ aus 2 $(A_1, A_2)$ auswählen = $\binom{2}{1} = 2$

$\underbrace{2\ A_i}_{A_i \cap A_j}$ aus 2 auswählen = $\binom{2}{2} = 1$

(b) $A_1 =$ "3-Blatt von Farbe Pik" $A_2 =$ "3-Blatt von Farbe Kreuz"

$A_3 =$ "3-Blatt von Farbe Herz" $A_4 =$ "3-Blatt von Farbe Karo"

P( von 1 oder 2 oder 3 oder 4 Farben ein 3-Blatt haben)

$= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

- $\underbrace{P(\overbrace{A_1}^{\text{3 Karten auf 9 Slots}}) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4)}_{1 \; A_i \text{ aus } 4 \; A_i \text{ auswählen: } \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = 4} = \frac{\frac{9!}{6!} \cdot 33!}{36!} = \frac{[9]_3}{[36]_3} \cdot 4$

- $\underbrace{P(\overbrace{A_1 \cap A_2}^{\text{6 Karten auf 9 Slots}}) = \ldots = P(A_3 \cap A_4)}_{2 \; A_i \text{ aus } 4 \; A_i \text{ auswählen: } \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6} = \frac{\frac{9!}{3!} \cdot 30!}{36!} = \frac{[9]_6}{[36]_6} \cdot 6$

- $\underbrace{P(\overbrace{A_1 \cap A_2 \cap A_3}^{\text{9 Karten auf 9 Slots}}) = \ldots = P(A_2 \cap A_3 \cap A_4)}_{3 \; A_i \text{ aus } 4 \; A_i \text{ auswählen: } \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4} = \frac{\frac{9!}{0!} \cdot 27!}{36!} = \frac{[9]_9}{[36]_9} \cdot 4$

- $P(\overbrace{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4}^{\text{12 Karten auf 9 Slots}})$ $\Rightarrow$ geht nicht $\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$

$$\Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4 \cdot \frac{[9]_3}{[36]_3} - 6 \cdot \frac{[9]_6}{[36]_6} + 4 \cdot \frac{[9]_9}{[36]_9} - 0$$