MathCourses

Bern Statistik 2

(Gatto)

Aufgaben

Stetige Verteilungen

MathCourses

www.mathcourses.ch/bern_statistik.html

MathCourses

www.mathcourses.ch/bern_statistik.html

Aufgabe 1: (Wahrscheinlichkeitsdichte, Verteilungsfunktion, Median)

Für eine Konstante C betrachten wir

$$f(x) := \begin{cases} Cx(1-x) & \text{falls } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den Wert

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Wählen Sie C nun so, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

b) Bestimmen Sie für diese Wahrscheinlichkeitsdichte f die entsprechende Verteilungsfunktion F,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

c) Skizzieren Sie die Dichtefunktion f und die Verteilungsfunktion F.

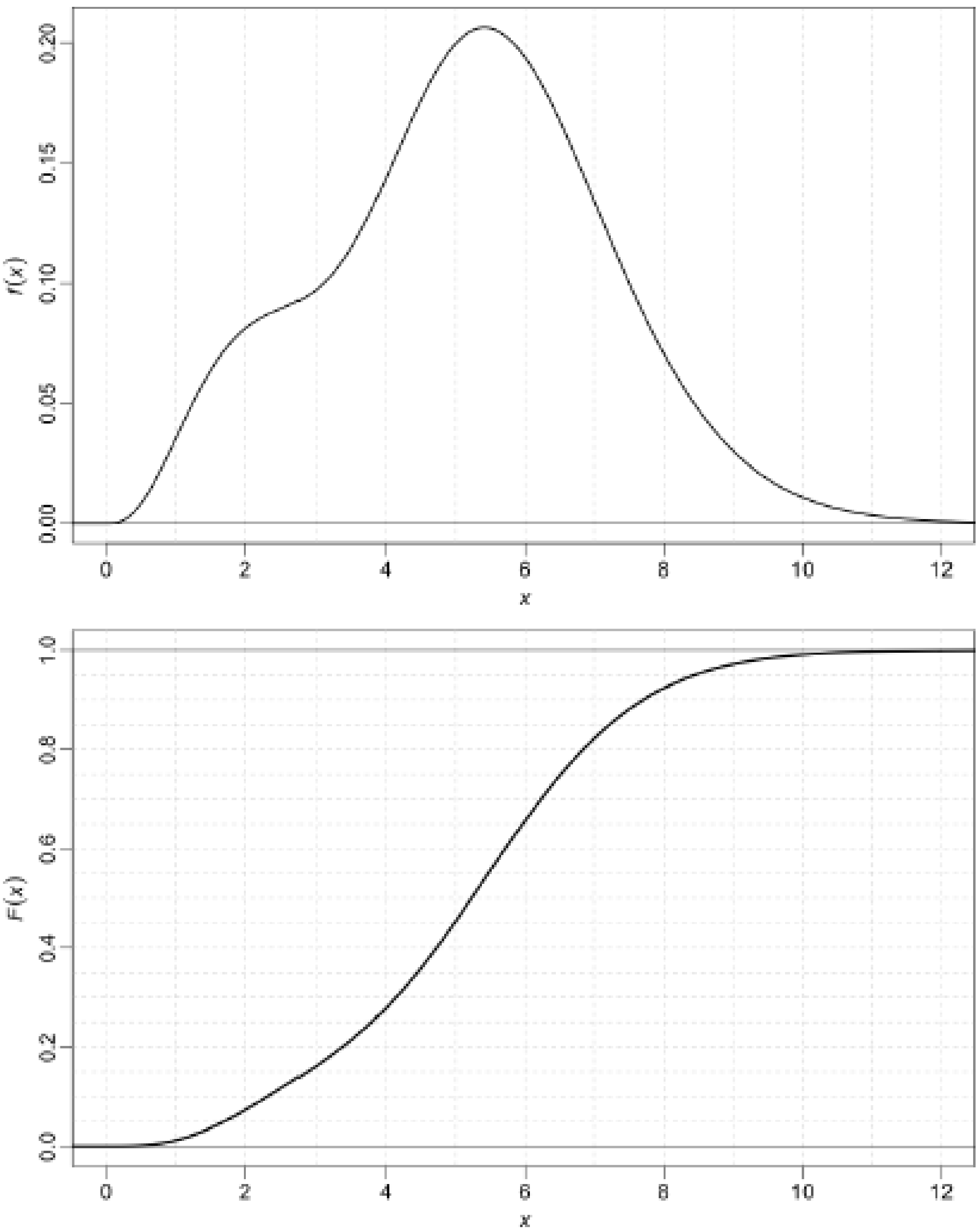
d) Bestimmen Sie den Median $q_{0.5}$ dieser Verteilung, also die (eindeutige) Zahl $q_{0.5}$ mit der Eigenschaft, dass $F(q_{0.5}) = 0.5$.

Aufgabe 2: (Wahrscheinlichkeiten graphisch darstellen & berechnen)

Nachfolgend sehen Sie die Dichtefunktion f und die Verteilungsfunktion F einer Zufallsvariable X.

Zeichnen Sie in dieser Graphik folgende Wahrscheinlichkeiten ein:

$$P(X \leq 3), \qquad P(|X-5| \leq 1) \qquad \text{und} \qquad P(X \geq 8).$$

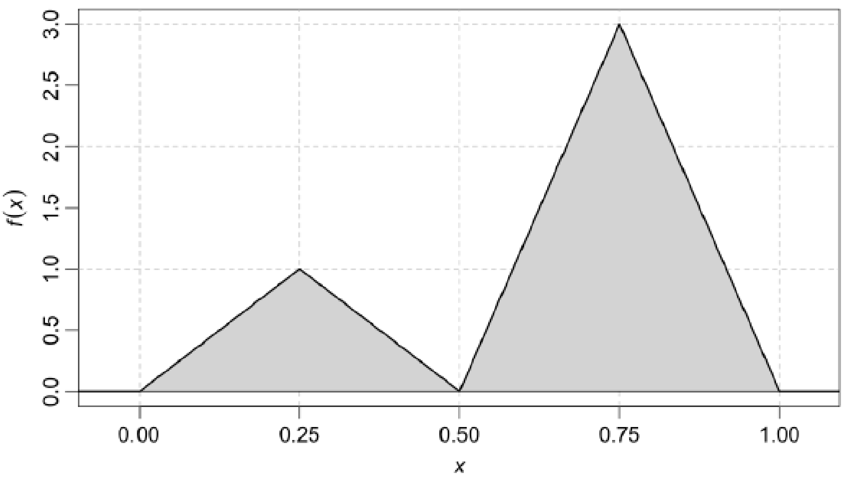


Bestimmen Sie auch die ungefähren Zahlenwerte dieser drei Wahrscheinlichkeiten.

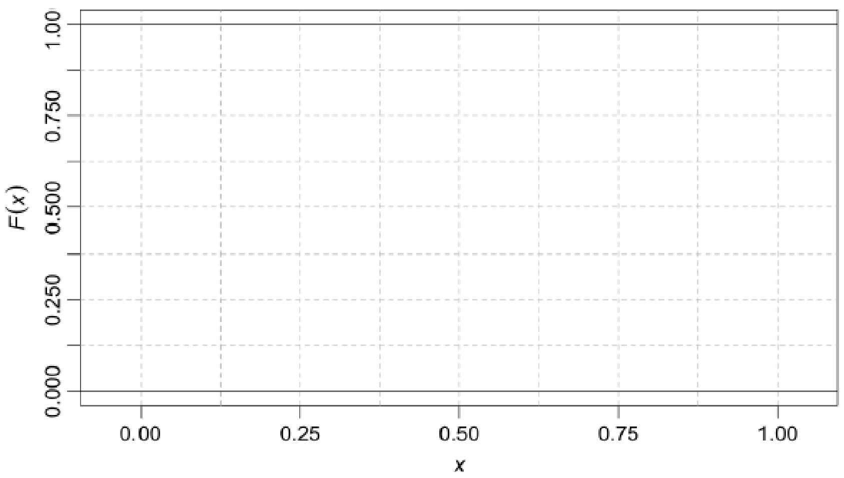
www.mathcourses.ch/bern_statistik.html

Aufgabe 3: (Graphisch von der Dichtefunktion zur Verteilungsfunktion)

Nachfolgend sehen Sie eine Dichtefunktion f:



Skizzieren Sie nun die entsprechende Verteilungsfunktion F, indem Sie zunächst $F(x)$ und $F'(x)$ für $x \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ ablesen und einzeichnen:

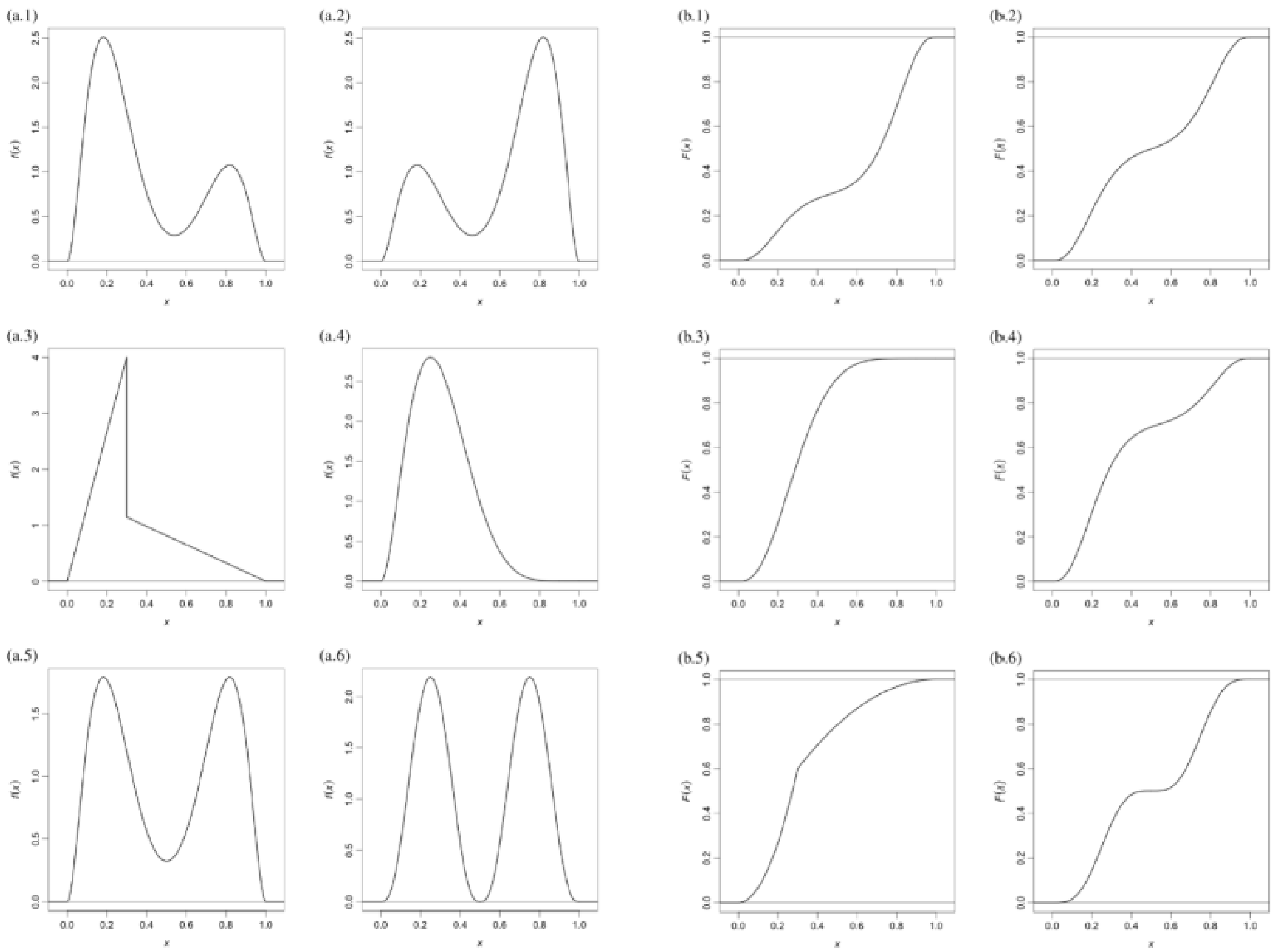


Aufgabe 4: (Zuordnen von Dichtefunktion und Verteilungsfunktion)

Auf der linken Seite sehen Sie sechs verschiedene Dichtefunktionen f (a.1 bis a.6).

Auf der rechten Seite sehen Sie sechs verschiedene Verteilungsfunktionen F (b.1 bis b.6).

Geben Sie an, welche Verteilungsfunktion zu welcher Dichtefunktion gehört.



MathCourses

www.mathcourses.ch/bern_statistik.html

Aufgabe 5: (Verteilungsfunktion, Quantil, Wahrscheinlichkeiten berechnen)

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$F(x) := \frac{e^x}{1+e^x}.$$

a) Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist, und bestimmen Sie die entsprechende Dichtefunktion f.

b) Bestimmen Sie für $\gamma \in (0,1)$ das γ-Quantil der Verteilung mit Verteilungsfunktion F, also die (eindeutige) Zahl q_γ, mit der Eigenschaft $F(q_\gamma) = \gamma$.

c) Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Bestimmen Sie den Wert von $P(1 \leq X \leq 3)$.

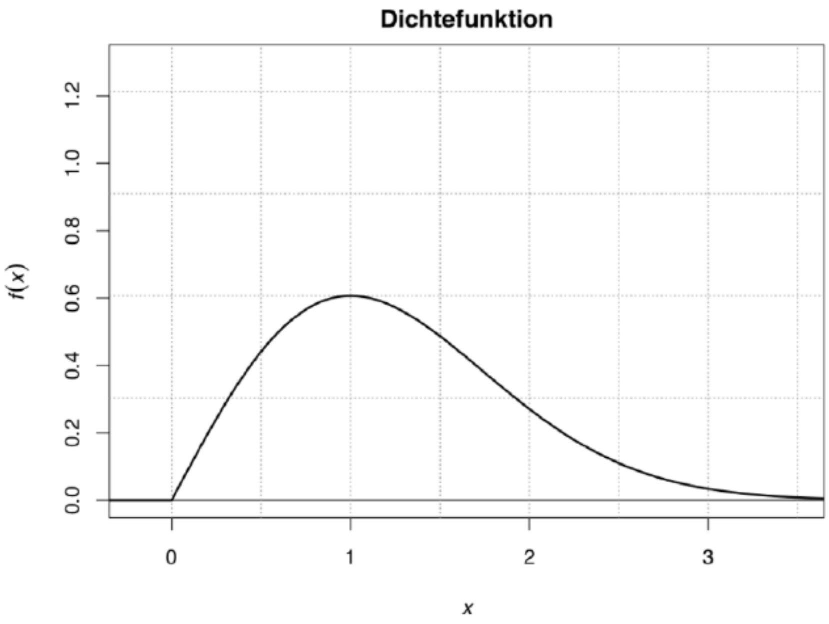
www.mathcourses.ch/bern_statistik.html

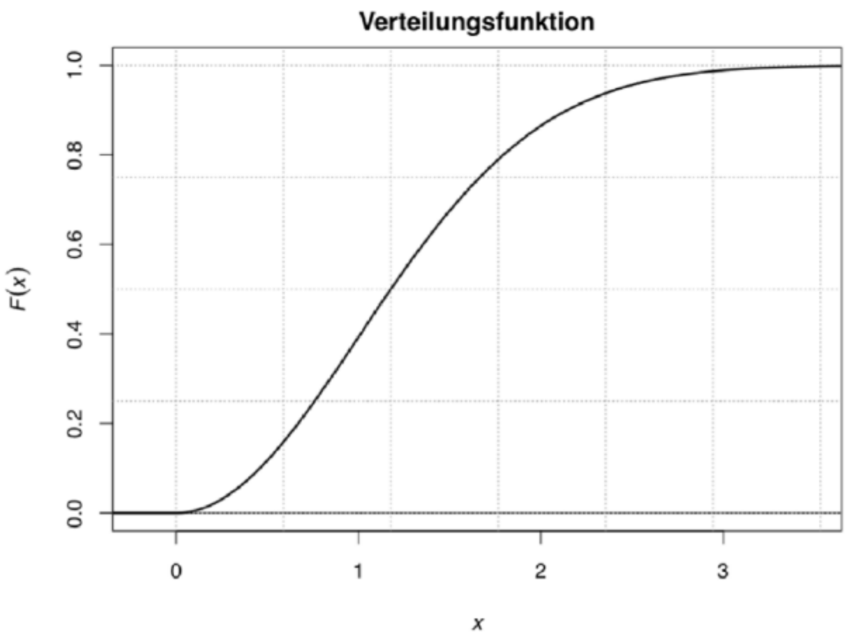
Aufgabe 6: (Zufallsvariable transformieren / Verteilung umformen)

Sei $X \sim f$ mit zugehöriger Verteilungsfunktion F. Unten sehen Sie die Grafiken zu f bzw. zu F.
Nun betrachten wir die transformierte Variable

$$Y := X/2.$$

Zeichnen Sie die dazugehörige Verteilungsfunktion $G(x) := P(Y \leq x)$ und Dichtefunktion $g(x) = G'(x)$ in die jeweiligen Grafiken ein.



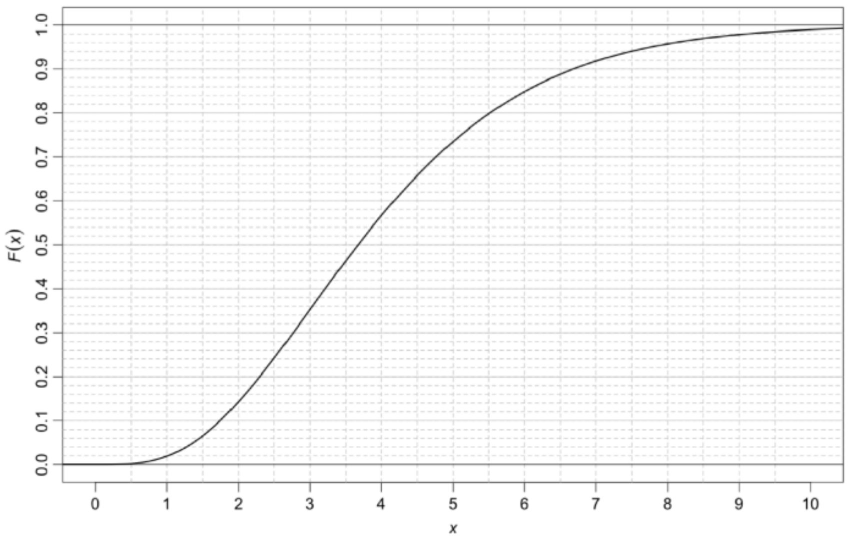


MathCourses

www.mathcourses.ch/bern_statistik.html

Aufgabe 7: (Gamma-Verteilung umformen)

Nachfolgend sehen Sie die Verteilungsfunktion von Gamma$(4, 1)$.



Nun betrachten wir eine Zufallsvariable X mit Verteilung Gamma$(4, \mathbf{4})$.

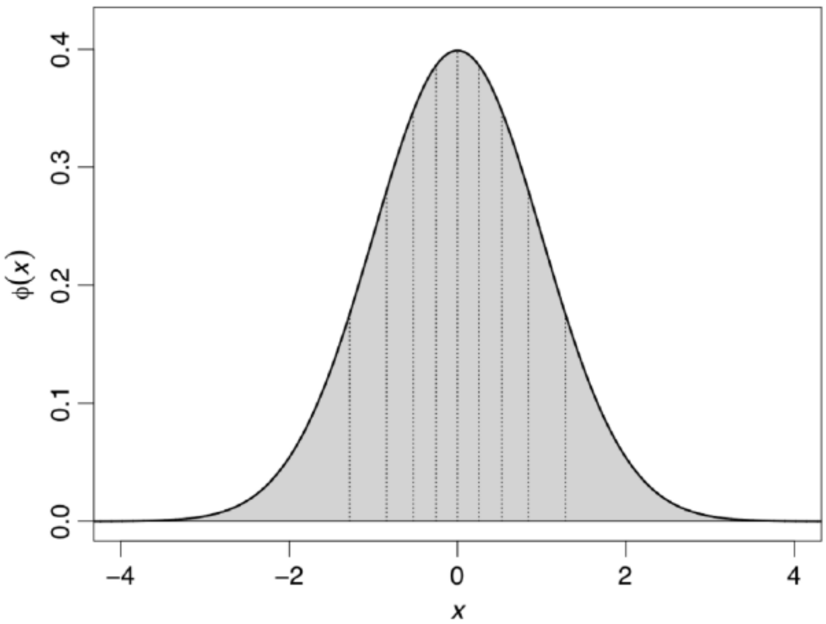
Bestimmen Sie anhand der Graphik folgende Wahrscheinlichkeiten bis auf einen Fehler von ca. 0.01:

$$P(X \leq 10), \qquad P(X \geq 28) \qquad \text{und} \qquad P(|X - 18| \leq 4).$$

www.mathcourses.ch/bern_statistik.html

Aufgabe 8: (Quantile einer Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ berechnen)

Nachfolgend sehen Sie die Dichtefunktion ϕ einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Die gepunkteten Linien deuten die Quantile $\Phi^{-1}(\gamma)$ für $\gamma = 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 0.9$ an.



a) Zeichnen Sie in die Grahik folgende Wahrscheinlichkeiten ein:

$$P\left(Z \leq \Phi^{-1}(0.3)\right), \quad P\left(|Z| \leq \Phi^{-1}(0.6)\right), \quad \text{und} \quad P\left(Z \geq \Phi^{-1}(0.9)\right)$$

b) Welchen Zahlenwert haben die in a) genannten Wahrscheinlichkeiten?

www.mathcourses.ch/bern_statistik.html

Aufgabe 9: (Wahrscheinlichkeiten einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ berechnen)

In einer bestimmten (Teil)Population sei das Körpergewicht normalverteilt mit Mittelwert $\mu = 62$kg und Standardabweichung $\sigma = 6.5$kg.

a) Berechnen Sie den relativen Anteil aller Individuen mit einem Gewicht

- kleiner als 65kg.
- kleiner oder gleich 50kg.
- zwischen 52kg und 72kg.

b) Bestimmen Sie die Quartile des Körpergewichts. Das heisst, bestimmen Sie für $\gamma \in \{1/4, 1/2, 3/4\}$ die Zahl q_γ, mit der Eigenschaft, dass ein relativer Anteil γ aller Individuen leichter ist als q_γ.

MathCourses

www.mathcourses.ch/bern_statistik.html

Aufgabe 10: (Erwartungswert μ und Varianz σ^2 berechnen können)

Berechnen Sie den Erwartungswert μ und Varianz σ^2 für folgende stetige Verteilung:

Für $b > 0$ definieren wir die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_b(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ \frac{1}{b}\exp\left(-\frac{x}{b}\right) & \text{für } x > 0. \end{cases}$$